

ÉLÉMENS
D'ALGEBRE.

DE L'ANALYSE DÉTERMINÉE.

ÉLÉMENS
D'ALGEBRE

PAR

LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.

DE L'ANALYSE DÉTERMINÉE.

A LYON,
Chez BRUYSET ainé & Compagnie.

L'an IIIe. de l'ÈRE Républicaine.

AVIS
SUR CETTE SECONDE ÉDITION.

La traduction françoise des Élémens d'Algebre d'EULER, sortie pour la premiere fois de nos presses en 1784, fut accueillie avec tout l'empressement que pouvoit promettre la célébrité de son illustre Auteur (*).

(*) Elle parut sous les auspices de d'Alembert, à qui elle fut dédiée ; le respect que nous portons à sa mémoire nous fait une loi de rappeler ici la dédicace placée alors à la tête de notre édition.

A M. D'ALEMBERT.

« Il ne nous appartient ni de prononcer sur le » mérite de l'Ouvrage dont vous nous avez » permis de faire paroître la premiere édition » Françoise sous vos auspices, ni d'ajouter aux » éloges qu'il a reçus, soit dans sa langue ori- » ginale, soit dans la traduction Russe qu'on

La clarté & la profondeur qui y regnent, devoient fixer l'attention de tous ceux qui s'appliquent à l'étude du calcul : plus l'ouvrage fut connu & apprécié, plus il fut recherché ; & les exemplaires de cette premiere édition devenus extrêmement rares, ont été portés, en dernier lieu, à un prix exorbitant. Il restoit à désirer, non pour la gloire de l'Auteur mais

---

» en a donnée. Le nom seul de M. *Euler*, en le » rendant précieux aux Mathématiciens, annonce » à ceux qui travaillent à le devenir, tout ce » qu'ils peuvent s'en promettre.

» M. BERNOULLI, digne héritier de ce nom » si grand dans les Sciences, & Directeur de » l'Observatoire de Berlin, s'est chargé de rendre » en notre langue le texte de M. *Euler*, & de » l'enrichir de quelques notes historiques. M. DE » LA GRANGE, dont le rare génie & les nom- » breux succès fixent depuis long-temps l'atten-

pour l'utilité publique, que l'ouvrage adopté publiquement fût mis entre les mains des jeunes éleves auxquels il avoit essentiellement été destiné. Ce vœu est maintenant accompli : le Comité d'instruction publique vient de le rappeler à sa destination premiere ; il en a consacré & étendu l'utilité.

Dans la vue de concourir à la

» tion de toute l'Europe savante, a ajouté au
» mérite de l'Ouvrage, en y joignant un mor-
» ceau destiné à compléter le traité de l'Analyse
» indéterminée.

» Tout concourt à établir vos droits sur l'hom-
» mage que nous prenons la liberté de vous of-
» frir. C'est au Philosophe, au Mathématicien qui
» honore son siecle, que nous devions présen-
» ter l'Ouvrage d'un homme également destiné à
» l'illustrer. L'ambition s'attacha souvent au rang
» pour s'appuyer de la faveur de la protection ;

*ſageſſe de ſes vues, nous nous ſommes hâtés de publier cette premiere partie, qui renferme & complete l'*Analyſe déterminée. *La ſeconde partie, entiérement conſacrée à l'*Analyſe indéterminée *& enrichie des additions du célebre* LA GRANGE, *eſt ſous preſſe; elle ſera diſtribuée ſéparément en faveur de ceux qui voudront compléter l'ouvrage.*

» un motif plus cher nous porte à vous offrir le » témoignage public de la reconnoiſſance que » nous devons aux bontés dont vous nous avez » honorés. En plaçant votre nom à la tête de ce » Livre, nos ſentimens pour vous nous ont » ſuggéré le choix qu'auroit pu faire le diſcer» nement le plus juſte, & nous nous applau» dirons dans notre hommage, d'avoir l'Europe » entiere pour témoin & pour approbateur. »

J. M. BRUYSET pere et fils.

AVERTISSEMENT
DES ÉDITEURS
DE L'ORIGINAL.

Nous mettons entre les mains des amateurs de l'Algebre un Ouvrage dont il a déjà paru une traduction Russe il y a deux ans.

Les vues du célebre Auteur étoient de composer un livre élémentaire, au moyen duquel on pût apprendre, sans aucun autre secours, l'Algebre à fond. La perte de sa vue lui avoit suggéré cette idée, l'activité de son génie ne lui permit pas de dif-

férer long-temps à la mettre en exécution. M. *Euler* choiſit pour cet effet un jeune homme qu'il avoit pris à ſon ſervice en quittant Berlin, qui poſſédoit aſſez bien l'Arithmétique, mais qui n'avoit d'ailleurs aucune teinture des Mathématiques; il avoit appris le métier de Tailleur, & ne pouvoit être mis, quant à ſa capacité, qu'au rang des eſprits ordinaires. Non-ſeulement ce jeune homme a très-bien ſaiſi tout ce que ſon illuſtre Maître lui enſeignoit & lui dictoit, mais il s'eſt même trouvé en peu de temps en état d'achever tout ſeul les calculs algébriques les

plus difficiles, & de résoudre promptement toutes les questions analytiques qu'on lui proposoit.

Le fait que nous citons doit donner une idée d'autant plus avantageuse de la méthode qui regne dans cet Ouvrage, que le jeune homme qui l'a écrit, qui en a développé les calculs, & dont les progrès ont été si marqués, n'a reçu absolument d'autres instructions que de ce Maître, supérieur à la vérité, mais privé de la vue.

Indépendamment d'un avantage aussi grand, les Connoisseurs verront, avec autant de

plaiſir que d'admiration, l'expoſition de la doctrine des logarithmes & de ſa liaiſon avec d'autres calculs, ainſi que les méthodes qu'on donne pour la réſolution des équations du troiſieme & du quatrieme degré.

Ceux enfin que les problêmes de *Diophante* peuvent intéreſſer, ſeront charmés de trouver dans la derniere ſection de la ſeconde Partie, tous ces problêmes préſentés d'une maniere ſuivie, & l'explication de tous les procédés de calcul néceſſaires pour les réſoudre.

AVERTISSEMENT
DU TRADUCTEUR.

Le Traité d'Algebre que j'ai entrepris de traduire, a été publié en Allemand en 1770 par l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. Je m'abſtiendrai d'en louer le mérite, ce ſeroit preſque faire injure au nom célebre de ſon Auteur; il ſuffira d'ailleurs d'en lire quelques pages, pour voir, par la clarté avec laquelle tout eſt expoſé, quel fruit les commençans peuvent en retirer. C'eſt ſur d'autres objets que je crois devoir un Avertiſſement.

Je me ſuis écarté de la diviſion ſuivie dans l'original, en faiſant entrer dans le premier volume de la traduction Françoiſe la premiere ſection du ſecond volume de l'original, qui complete l'Analyſe déterminée.

On ſentira facilement les raiſons de ce changement ; non-ſeulement il favoriſoit la diviſion aſſez naturelle de l'Algebre en Analyſe déterminée & en Analyſe indéterminée, mais il devenoit néceſſaire pour conſerver quelque égalité dans l'épaiſſeur des deux volumes, par rapport aux Additions qu'on trouve à la fin de la ſeconde partie.

On s'appercevra aiſément à la lecture de ces Additions, qu'elles ne peuvent être que de M. *de la Grange* ; auſſi ſont-elles une des raiſons qui m'ont principalement engagé à entreprendre ma traduction ; je me ſuis félicité d'être le premier à faire voir plus généralement aux Mathématiciens à quel haut point de perfection deux de nos plus illuſtres Géometres ont porté depuis peu une branche de l'Analyſe, peu connue, mais dont on ſent les épines dès qu'on cherche à l'approfondir, & qui, de l'aveu

même de ces grands génies, leur a offert les problêmes les plus difficiles qu'ils aient jamais résolus.

Je crois avoir traduit cette Algebre comme on convient qu'il faut traduire des Ouvrages de cette espece : je me suis principalement attaché à entrer dans le sens de l'original & à le rendre avec toute la clarté possible ; peut-être même oserai-je attribuer quelque supériorité à ma Traduction sur l'original, parce que cet Ouvrage ayant été dicté & n'ayant pu être revu par son illustre Auteur, il est facile de concevoir qu'il avoit besoin dans plusieurs endroits qu'on y passât la lime. Au reste, si je ne me suis point asservi à traduire littéralement, je n'ai pas laissé de suivre mon Auteur pas à pas ; j'ai conservé les mêmes divisions dans les articles, & c'est dans un si petit nombre d'endroits que j'ai pensé à supprimer quelques détails de calcul, ou à insérer une

ou deux lignes d'éclairciſſement dans le texte, qu'il ne vaut pas, je crois, la peine d'entrer dans le détail des raiſons qui peuvent me juſtifier.

Je ne dirai rien non plus des notes que j'ai ajoutées à la premiere Partie; elles ſont en aſſez petit nombre pour que je ne craigne pas le reproche d'avoir groſſi inutilement le volume, elles peuvent d'ailleurs répandre du jour ſur différens points de l'hiſtoire des Mathématiques, & faire connoître un grand nombre de tables ſubſidiaires peu connues.

Quant à l'exactitude de la correction, je compte qu'elle ne le cédera en rien à celle de l'original; j'ai comparé avec ſoin tous les calculs, & en ayant refait un grand nombre moi-même, j'ai pu corriger pluſieurs fautes indépendamment de celles qui étoient indiquées dans l'*Errata*.

ÉLÉMENS

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE,

Où l'on traite de l'Analyse déterminée.

SECTION PREMIERE.

Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs simples ou incomplexes.

CHAPITRE PREMIER.

DES MATHÉMATIQUES EN GÉNÉRAL.

I.

On nomme *grandeur* ou *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation & de diminution.

Une somme d'argent est donc une quan-

tité, puiſqu'on peut y ajouter & qu'on peut en ôter.

Il en eſt de même d'un poids & d'autres choſes de cette nature.

2.

On voit donc facilement qu'il doit y avoir tant de différentes eſpeces de grandeurs, qu'il ſeroit même difficile d'en faire l'énumération : & voilà l'origine des différentes Parties des Mathématiques, chacune d'elles s'occupant d'une eſpece particuliere de grandeurs. Les Mathématiques en général ne ſont autre choſe que la *ſcience des quantités*, ou la ſcience qui cherche les moyens de les meſurer.

3.

Or nous ne pouvons meſurer ou déterminer une quantité, qu'en regardant une autre quantité de la même eſpece comme connue, & en indiquant le rapport de celle-ci à celle-là.

Qu'il s'agiſſe, par exemple, de déterminer la quantité d'une ſomme d'argent, on regardera comme connu un louis, un écu, un ducat ou quelqu'autre monnoie, & on indiquera combien de ces pieces ſont contenues dans ladite ſomme.

De même, s'il étoit queſtion de déterminer la quantité d'un poids, on regarderoit un certain poids comme connu; par exemple, une livre, un quintal, une once, & on indiqueroit combien de fois tel ou tel poids eſt contenu dans celui qu'on détermine.

Veut-on meſurer une longueur ou une étendue, on ſe ſervira d'une certaine longueur connue, telle qu'eſt un pied.

4.

Ainſi les déterminations ou les meſures de grandeurs de toutes eſpeces, reviennent à ceci: Qu'on fixe d'abord à volonté une certaine grandeur de la même eſpece que celle qu'on veut déterminer, afin de la

prendre pour *mesure* ou *unité ;* ensuite, que l'on détermine le rapport qu'a la grandeur prescrite avec cette mesure connue. Ce rapport s'exprime toujours par des nombres, d'où il s'ensuit qu'un nombre n'est autre chose que le rapport d'une grandeur à une autre prise arbitrairement pour l'unité.

5.

Il est évident par-là que toutes les grandeurs peuvent être exprimées par des nombres, & qu'on doit faire consister ce fondement de toutes les Sciences Mathématiques, dans un traité complet de la science des Nombres & un examen soigneux des différentes manieres de calculer qui peuvent se présenter.

On nomme cette partie fondamentale des Mathématiques, l'*Analyse* ou l'*Algebre* (*).

(*) Plusieurs Mathématiciens distinguent entre *Analyse* & *Algebre*. Ils entendent par le terme d'*Analyse* la méthode qui enseigne à trouver ces regles générales, au

6.

On ne considére donc dans l'Analyse que des nombres qui représentent des quantités, sans s'embarrasser des especes particulieres des Quantités. C'est dans les autres parties des Mathématiques qu'on s'occupe de ces especes.

7.

On traite des Nombres en particulier dans l'*Arithmétique*, qui est la *science des Nombres proprement dite*; mais cette science ne s'étend qu'à de certaines façons de calculer qui se présentent ordinairement dans la vie commune. L'Analyse au contraire comprend généralement tous les cas qui peuvent avoir lieu dans la doctrine & le calcul des Nombres.

moyen desquelles on soulage l'esprit dans toutes les recherches mathématiques; & ils nomment *Algebre* l'instrument que cette méthode emploie pour y parvenir. C'est la définition que M. *Bezout* adopte dans la Préface de son *Algebre*.

CHAPITRE II.

Explication des Signes + Plus & — Moins.

8.

QUAND il s'agit d'ajouter à un nombre donné un autre nombre, cela s'indique par le signe + qu'on met devant ce second nombre, & qu'on prononce *plus*. Ainsi 5 + 3 signifie qu'on doit ajouter encore 3 au nombre 5, & tout le monde sait qu'il en résultera 8; de même 12 + 7 font 19; 25 + 16 font 41; la somme de 25 + 41 est 66, &c.

9.

On a coutume aussi de se servir du même signe + *plus*, pour lier ensemble plusieurs nombres; par exemple: 7 + 5 + 9 signifie qu'au nombre 7 il faut ajouter 5 & de plus encore 9, ce qui fait 21. On comprend donc ce que signifie la formule suivante:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,$$

à ſavoir, la ſomme de tous ces nombres, qui fait 51.

10.

Tout cela ne peut qu'être clair, & il reſte à faire obſerver que dans l'Analyſe on indique les nombres d'une maniere générale par des lettres, comme a, b, c, d, &c. Ainſi, quand on écrit $a + b$, cela ſignifie la ſomme des deux nombres qu'on a exprimés par a & b, & ces nombres peuvent être très-grands ou très-petits. De même $f + m + b + x$, ſignifie la ſomme des nombres indiqués par ces quatre lettres.

Il ſuffira donc toujours de ſavoir quels nombres ont été indiqués par de telles lettres pour trouver auſſi-tôt, par l'Arithmétique, les ſommes ou les valeurs de pareilles formules.

11.

Quand il eſt queſtion, au contraire, d'ôter ou de ſouſtraire un nombre d'un

autre nombre, on indique cette opération par le signe —, qui signifie *moins*, & qu'on met devant le nombre à soustraire : ainsi

$$8 - 5$$

signifie que le nombre 5 doit être ôté du nombre 8; ce qui étant fait il reste 3, comme personne ne l'ignore. De même 12 — 7 est autant que 5, & 20 — 14 est autant que 6, &c.

12.

Il peut arriver aussi qu'on ait plusieurs nombres à soustraire d'un seul nombre. C'est le cas de cet exemple :

$$50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9.$$

Cela signifie : Otez d'abord 1 de 50, il reste 49 ; ôtez 3 de ce reste, il restera 46 ; ôtez-en encore 5, restent 41 ; ôtez ensuite 7, il reste 34 ; ôtez-en enfin 9, restent 25 ; & ce dernier reste est la valeur de la formule proposée. Mais comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9 sont tous à soustraire, il revient au même de soustraire leur somme,

qui eſt 25, toute à la fois de 50; le reſte ſera 25, comme auparavant.

13.

Il eſt de même très-facile de déterminer la valeur de pareilles formules, où les deux ſignes + *plus* & — *moins* ſe rencontrent; par exemple :

$12 - 3 - 5 + 2 - 1$ eſt autant que 5.

Il n'y a qu'à prendre ſéparément la ſomme des nombres précédés du ſigne +, & en ôter celle des nombres précédés de —. La ſomme de 12 & de 2 eſt 14, celle de 3, 5 & 1, eſt 9; or 9 étant ôté de 14, il reſte 5.

14.

On s'appercevra bien par ces exemples que l'ordre des nombres qu'on écrit eſt très-indifférent & tout-à-fait arbitraire, pourvu qu'on conſerve à chacun ſon ſigne. Rien n'empêcheroit de mettre à la place de la formule du § précédent celles-ci :

$12 + 2 - 5 - 3 - 1$; ou $2 - 1 - 3 - 5 + 12$;

ou $2 + 12 - 3 - 1 - 5$;

ou encore d'autres; & il faut remarquer que dans la formule proposée, le signe + est censé être mis devant le nombre 12.

15.

On n'aura plus de difficultés non plus quand, pour généraliser ces procédés, on voudra se servir de lettres à la place de nombres réels. Il est clair, par exemple, que

$$a - b - c + d - e$$

signifie qu'on a des nombres exprimés par a & d, & que de ces nombres, ou de leur somme, il faut ôter les nombres exprimés par les lettres b, c, e, & précédés du signe —.

16.

Il importe donc principalement ici de savoir quel signe se trouve devant chaque nombre. De là vient que dans l'Algebre, les quantités simples sont les nombres considérés avec les signes qui les précedent

ou qui les *affectent*. On nomme *quantités positives*, celles devant lesquelles se trouve le signe +; & *quantités négatives*, celles qui sont affectées du signe —.

17.

La maniere dont on a coutume d'indiquer les biens d'une personne, est très-propre à éclaircir ce que nous venons de dire. On indique par des nombres positifs, & moyennant le signe +, ce qu'un homme possede réellement; au lieu que ses dettes se représentent par des nombres négatifs, ou par le moyen du signe —. Ainsi quand on dit de quelqu'un qu'il a 100 écus, mais qu'il en doit 50; c'est dire que son bien se monte à

100—50; ou, ce qui est la même chose, +100—50, c'est-à-dire 50.

18.

Puisque les nombres négatifs peuvent être considérés comme des dettes, en tant

que les nombres positifs indiquent des biens effectifs, on peut dire que les nombres négatifs sont moins que rien. Ainsi quand un homme ne possède rien, & qu'il doit même 50 écus, il est certain qu'il a 50 écus de moins que rien; car si quelqu'un lui faisoit présent de 50 écus pour payer ses dettes, il ne seroit encore qu'au point de n'avoir rien, quoiqu'il fût devenu plus riche qu'il n'étoit.

19.

De même donc que les nombres positifs sont incontestablement plus grands que rien, les nombres négatifs sont plus petits que rien. On en obtient des nombres positifs en ajoutant 1 à 0, c'est-à-dire, à rien, & en continuant d'augmenter ainsi toujours de l'unité. C'est là l'origine de la suite des nombres qu'on nomme *nombres naturels*; en voici les premiers termes :

$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$ & ainsi de suite à l'infini.

Mais ſi au lieu de continuer ainſi cette ſuite par des additions ſucceſſives on la continuoit dans le ſens contraire, en retranchant perpétuellement l'unité, on auroit la ſuite, ou ſérie ſuivante, des nombres négatifs :

0, −1, −2, −3, −4, −5, −6, −7, −8, −9, −10,
& ainſi de ſuite juſqu'à l'infini.

20.

Tous ces nombres tant poſitifs que négatifs, ont le nom connu de *nombres entiers ;* leſquels par conſéquent ſont ou plus grands ou plus petits que rien. On les nomme *nombres entiers*, pour les diſtinguer d'avec les nombres rompus, & d'avec pluſieurs autres eſpeces de nombres dont nous parlerons dans la ſuite. Car 50, par exemple, étant plus grand d'une unité entiere que 49, on comprend facilement qu'il peut y avoir entre 49 & 50 une infinité de nombres intermédiaires, tous plus grands que 49, & pourtant tous plus petits que 50. On n'a

qu'à se représenter deux lignes, l'une longue de 50 pieds, l'autre longue de 49 pieds, on conçoit aisément qu'on peut tirer un nombre infini de lignes toutes plus longues que 49 pieds, & plus courtes cependant que 50 pieds.

21.

Il importe extrêmement dans toute l'Algebre, que l'on se fasse une idée nette de ces quantités négatives dont il a été question. Je me contenterai de faire remarquer ici d'avance que toutes ces formules, par exemple,

$+1-1$, $+2-2$, $+3-3$, $+4-4$, &c. valent 0 ou rien. Ensuite que

$$+2-5 \text{ vaut } -3.$$

Car si quelqu'un a 2 écus & qu'il en doive 5, non-seulement il n'a rien, mais il doit encore 3 écus : de même

$$7-12 \text{ est autant que } -5.$$

$$\& \; 25-40 \text{ vaut } -15.$$

22.

Les mêmes choſes doivent s'obſerver, quand on emploie d'une maniere plus générale des lettres au lieu de nombres; on aura toujours o ou rien pour la valeur de $+a-a$. Veut-on ſavoir enſuite ce que ſignifie, par exemple, $+a-b$, l'on conſidérera deux cas :

Le premier a lieu quand a eſt plus grand que b; il faut alors ſouſtraire b de a & le reſte, devant lequel on mettra ou l'on ſuppoſera le ſigne $+$, qui indique la valeur cherchée.

Le ſecond cas eſt celui où a eſt plus petit que b; on ſouſtraira dans ce cas a de b, & on prendra le reſte négatif, en lui donnant le ſigne $-$, ce ſera la valeur cherchée.

CHAPITRE III.

De la multiplication des Quantités ſimples.

23.

QUAND on a deux ou pluſieurs nombres égaux à ajouter enſemble, on peut exprimer cette ſomme d'une maniere abrégée; par exemple :

$a+a$ eſt autant que $2.a$ &

$a+a+a$ ———— $3.a$; de même

$a+a+a+a$ —— $4.a$, & ainſi de ſuite.

C'eſt ainſi qu'on peut prendre une idée de la multiplication, & il faut remarquer que :

$2.a$ ſignifie 2 fois a &

$3.a$ ——— 3 fois a &

$4.a$ ——— 4 fois a, &c.

24.

S'il s'agit donc de multiplier un nombre exprimé par une lettre, avec un nombre quelconque,

quelconque, on met ſimplement ce nombre devant la lettre ; ainſi

a multiplié par 20 fait 20 *a*, &
b multiplié par 30 donne 30 *a*, &c.

On voit auſſi que *c* pris une fois, ou 1 *c* eſt autant que *c*.

25.

Il eſt de plus facile de multiplier de ſemblables produits encore par d'autres nombres ; par exemple :

2 fois 3 *a* fait 6 *a*.
3 fois 4 *b* fait 12 *b*.
5 fois 7 *x* fait 35 *x*.

Et ces produits peuvent ſe multiplier encore par d'autres nombres à volonté.

26.

Quand le nombre par lequel on devroit multiplier, eſt auſſi repréſenté par une lettre, on la met immédiatement devant l'autre lettre ; ainſi quand il s'agit de multiplier *b* par *a*, le produit doit s'écrire *a b* ;

& *p q* ſera le produit de la multiplication du nombre *q* par *p*. Si l'on multiplioit ce *p q* encore par *a*, on obtiendroit *a p q*.

27.

Il faut bien remarquer qu'ici l'ordre des lettres jointes enſemble eſt indifférent ; que *a b* eſt la même choſe que *b a* ; car *b* multiplié par *a* fait autant que *a* multiplié par *b*. Pour comprendre ceci on n'a qu'à prendre pour *a* & *b* des nombres connus, comme 3 & 4 ; la choſe ſera claire par elle-même : 3 fois 4 font autant que 4 fois 3.

28.

On n'aura pas de peine à voir, que quand il s'agit de mettre des nombres à la place des lettres jointes enſemble de la maniere qu'on a vu, on ne peut pas les écrire de la même maniere l'un à côté de l'autre. Car ſi l'on vouloit écrire 34 pour 3 fois 4, ce ſeroit mettre 34 & non pas 12. On a donc ſoin, quand il s'agit d'une multiplication de

nombres ordinaires, de les féparer par des points : ainfi 3.4 fignifie 3 fois 4, c'eft-à-dire 12. De même 1.2 eft autant que 2 ; & 1.2.3 fait 6. Pareillement 1.2.3.4.56 fait 1344 ; & 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 vaut 3628800, &c.

29.

On peut auffi conclure de là ce que fignifie une *quantité* de cette forme 5.7.8. *a b c d*. *Elle* montre que 5 doit fe multiplier par 7, & qu'il faut multiplier ce produit encore par 8 ; enfuite qu'il faut multiplier ce produit des trois nombres, par *a*, & puis par *b* & puis par *c*, & enfin par *d*. On remarquera de plus qu'on peut écrire à la place de 5.7.8 fa valeur, laquelle eft 280 ; car c'eft ce qui vient, quand on multiplie par 8 le produit de 5 par 7, ou 35.

30.

On aura remarqué que nous avons nommé PRODUITS les formules qui naiffent de

la multiplication de deux ou plusieurs nombres. Il faut observer aussi qu'on nomme *facteurs* les nombres ou les lettres isolées.

31.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des nombres positifs, & il n'y a pas eu lieu de douter que les produits que nous avons vu se former ne fussent positifs de même : savoir $+a$ par $+b$ doit donner nécessairement $+ab$. Mais il faudra examiner à part ce qui doit provenir de la multiplication de $+a$ par $-b$, & de $-a$ par $-b$.

32.

Commençons par multiplier $-a$ par 3 ou $+3$; or puisque $-a$ peut être considéré comme une dette, il est clair que si l'on prend trois fois cette dette, elle doit aussi devenir trois fois plus grande, & par conséquent le produit cherché est $-3a$. De même s'il s'agit de multiplier $-a$ par $+b$, on obtiendra $-ba$, ou, ce qui

eſt la même choſe, — *ab*. Nous tirons de là la conſéquence, qu'une quantité poſitive étant multipliée par une quantité négative, le produit eſt négatif; & nous prenons pour regle, que + par + fait + ou *plus*, & qu'au contraire + par —, ou — par + donne — ou *moins*.

33.

Il nous reſte à réſoudre encore ce cas où — eſt multiplié par —, ou, par exemple, — *a* par — *b*. Il eſt évident d'abord que, quant aux lettres, le produit ſera *ab*; mais il eſt incertain encore ſi c'eſt le ſigne +, ou bien le ſigne — qu'il faut mettre devant ce produit; tout ce qu'on ſait, c'eſt que ce ſera ou l'un ou l'autre de ces ſignes. Or je dis que ce ne peut être le ſigne —: car — *a* par + *b* donne — *ab*, & — *a* par — *b* ne peut produire le même réſultat que — *a* par + *b*; mais il doit en réſulter l'oppoſé, c'eſt-à-dire, + *ab*; par conſéquent nous avons cette regle: — multiplié

par — fait +, de même que + multiplié par +.

34.

Les regles que nous venons de développer s'expriment plus briévement de la maniere qui suit :

Deux signes égaux ou semblables, multipliés l'un par l'autre, donnent +; deux signes dissemblables, ou contraires, donnent —. Ainsi quand il s'agit de multiplier ensemble ces nombres-ci : $+a, -b, -c, +d$; on a d'abord $+a$ multiplié par $-b$, fait $-ab$; ceci par $-c$, fait $+abc$, & ceci enfin multiplié par $+d$, fait $+abcd$.

35.

Les difficultés à l'égard des signes étant levées, nous n'avons plus qu'à faire voir comment on doit multiplier ensemble des nombres qui sont déjà des produits eux-mêmes. S'il s'agit, par exemple, de multiplier le nombre ab par le nombre cd,

le produit sera $abcd$, & il provient de ce qu'on multiplie d'abord ab par c, & ensuite le résultat de cette multiplication encore par d. Ou bien s'il s'agissoit de multiplier 36 par 12 : puisque 12 est autant que 3 fois 4, on n'auroit qu'à multiplier 36 d'abord par 3, & ensuite le produit 108 encore par 4, pour avoir le produit total de la multiplication de 12 par 36, lequel est par conséquent 432.

36.

Mais si l'on vouloit multiplier $5\,ab$ par $3\,cd$, on pourroit à la vérité écrire $3\,cd\,5\,ab$; cependant comme il ne s'agit pas ici de l'ordre des nombres à multiplier ensemble, on fera mieux de mettre, comme c'est aussi la coutume, les nombres ordinaires devant les lettres, & d'exprimer le produit de cette maniere : $5.3\,abcd$, ou $15\,abcd$; parce que 5 fois 3 est autant que 15.

De même si l'on avoit à multiplier $12\,pqr$, par $7\,xy$, on obtiendroit $12.7\,pqrxy$, ou $84\,pqrxy$.

CHAPITRE IV.

De la nature des Nombres entiers, eu égard à leurs facteurs.

37.

NOUS avons remarqué qu'un produit tire son origine de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres les uns par les autres, & qu'on nomme ces nombres des *facteurs*.

Ainsi ce sont les nombres a, b, c, d, qui sont les facteurs du produit $abcd$.

38.

Si l'on considere donc tous les nombres entiers en tant qu'ils peuvent provenir de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres entr'eux, on trouvera bientôt que quelques-uns ne sauroient résulter d'une pareille multiplication, & n'ont par conséquent point de facteurs, tandis que d'autres

peuvent être les produits de deux ou de plusieurs nombres multipliés ensemble, & peuvent par conséquent avoir deux ou plusieurs facteurs. C'est ainsi que :

4 est autant que 2.2 ; que 6 est autant que 2.3 ; que 8 est autant que 2.2.2 ; ou 27 autant que 3.3.3 ; & 10 autant que 2.5, &c.

39.

Mais d'un autre côté les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. ne peuvent être représentés de la même façon par des facteurs, à moins qu'on ne voulût employer pour cet effet l'unité, & représenter 2, par exemple, par 1.2. Or les nombres qui sont multipliés par 1, restant les mêmes, on n'a pas jugé à propos de compter l'unité parmi les facteurs.

Tous ces nombres donc, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. qui ne peuvent pas s'indiquer par des facteurs, ont été nommés *nombres simples*, ou *nombres premiers* ; au lieu que

les autres, comme 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, &c. qui peuvent être représentés par des facteurs, s'appellent des *nombres composés.*

40.

Les nombres *simples* ou *premiers* méritent donc une attention particuliere, par la raison qu'ils ne proviennent pas de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres. Il est sur-tout digne de remarque que si l'on écrit ces nombres dans leur ordre naturel comme ils se suivent,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, &c. (*)

(*) On trouve tous les nombres premiers depuis 1 jusqu'à 100000 dans les tables de Diviseur, dont je parlerai à l'article 720 de la quatrieme section. Mais on a de plus des tables particulieres des nombres premiers qui vont depuis 1 jusqu'à 101000, & qui ont été publiées à Halle par M. *Kruger*, dans un Ouvrage Allemand intitulé *Pensées sur l'Algebre ;* M. *Kruger* les avoit eues en manuscrit de celui qui les avoit calculées, & qui se nommoit *Pierre Jaeger.* M. *Lambert* a continué ces tables jusqu'à 102000, & les a redonnées dans ses Supplémens

on n'y remarque point d'ordre régulier ; leurs augmentations sont tantôt plus grandes, tantôt moindres ; & jusqu'à présent

aux Tables Logarithmiques & Trigonométriques, imprimées à Berlin en 1770, Ouvrage qui contient aussi plusieurs autres tables qui peuvent être d'une grande utilité dans les différentes parties des Mathématiques, & des éclaircissemens qu'il seroit trop long de rapporter ici.

L'Académie Royale des Sciences de Paris possede des tables de nombres premiers, qui lui ont été présentées par le P. *Mercastel* de l'Oratoire, & par M. *du Tour* ; mais elles n'ont pas été publiées : il en est parlé dans le tome V des Mémoires étrangers présentés à l'Académie, à l'occasion d'un Mémoire de M. *Rallier des Ourmes*, Conseiller d'Honneur au Présidial de Rennes, qui se trouve dans ce volume, & l'Auteur y expose une méthode facile de trouver les nombres premiers.

On trouve dans le même volume un autre Mémoire de M. *Rallier des Ourmes*, qu'il a intitulé *Méthode nouvelle de division, quand le dividende est multiple du diviseur, & se peut par conséquent diviser sans reste, & d'extraction de racines quand la puissance est parfaite.* Cette méthode plus curieuse à la vérité qu'utile, n'a presque rien de commun avec la méthode ordinaire ; elle est très-facile & elle a cette singularité, que pourvu qu'on connoisse autant de chiffres sur la droite du dividende ou de la puissance, que le quotient ou la racine doivent avoir de chiffres, on peut se passer des chiffres qui les précedent ;

on n'a pu découvrir si elles se font suivant une certaine loi ou non.

41.

Les nombres composés, qui peuvent être représentés par des facteurs, proviennent tous des nombres premiers susdits, c'est-à-dire que tous leurs facteurs sont des nombres premiers. Car si l'on trouve un facteur qui ne soit pas un nombre premier, on peut toujours le décomposer & le représenter par deux ou plusieurs nombres premiers. Quand on a indiqué, par exemple, le nombre 30 par 5.6, on voit que 6 n'étant pas un nombre premier, mais valant 2.3, on auroit pû indiquer 30 par 5.2.3, ou par 2.3.5; c'est-à-dire, par des facteurs qui sont tous des nombres premiers.

& obtenir de même le quotient. M. *Rollier des Ourmes* s'est ouvert cette nouvelle route au moyen de quelques réflexions sur les nombres qui terminent les expressions numériques des produits ou des puissances, une espece de nombres que j'ai remarqués aussi dans d'autres occasions qu'il étoit utile de considérer.

42.

Si l'on réfléchit maintenant ſur ces nombres compoſés réſolubles en nombres premiers, on y remarquera une grande différence; on verra que les uns n'ont que deux de ces facteurs, que d'autres en ont trois, & que d'autres encore en ont un plus grand nombre. Nous avons déjà vu, par exemple, que

4 eſt autant que 2.2,	6 autant que 2.3;
8 — — — 2.2.2,	9 — — — — 3.3,
10 — — — — 2.5,	12 — — — 2.3.2,
14 — — — — 2.7,	15 — — — — 3.5,
16 — — — 2.2.2.2.	& ainſi de ſuite.

43.

On conclura aiſément de là comment on doit déterminer les facteurs ſimples d'un nombre quelconque.

Soit propoſé pour exemple le nombre 360, on le repréſentera d'abord par 2.180. Or 180 eſt autant que 2.90, &

90 — — — 2.45, &
45 — — — 3.15, & enfin
15 — — — 3.5.

Par conséquent le nombre 360 peut être représenté par les facteurs simples que voici :

2.2.2.3.3.5,

puisque tous ces nombres multipliés ensemble produisent 360 (*).

44.

Nous voyons donc par tout cela, que les nombres premiers ne peuvent pas être divisés par d'autres nombres, & que d'un autre côté on trouve les facteurs simples des nombres composés, le plus commodément & le plus surement, en cherchant les nombres simples, ou premiers, par lesquels ces nombres composés sont divisibles. Mais on a besoin pour cela de la *division ;* nous allons donc expliquer, dans le chapitre suivant, les regles de cette opération.

(*) On trouve à la fin d'une Arithmétique Allemande de *Poëtius*, publiée à Leipsig en 1728, une table où tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10000 sont représentés de cette maniere par leurs facteurs simples.

CHAPITRE V.

De la division des Quantités simples.

45.

QUAND il s'agit de décompofer un nombre en deux, trois ou plufieurs parties égales, on le fait par le moyen de la *divifion*, laquelle nous apprend à déterminer la grandeur d'une de ces parties. Quand on veut, par exemple, décompofer le nombre 12 en trois parties égales, on trouve par la divifion que chacune de ces parties eft égale à 4.

Voici quelques expreffions dont on fe fert dans cette opération. Le nombre qu'on doit décompofer ou divifer, s'appelle le *dividende ;* le nombre des parties égales qu'on cherche fe nomme le *divifeur ;* la grandeur d'une de ces parties, déterminée

par la diviſion, s'appelle le *quotient*; ainſi dans l'exemple cité :

12 eſt le *dividende*,
3 eſt le *diviſeur*, &
4 eſt le *quotient*.

46.

Il s'enſuit de là, que ſi l'on diviſe un nombre par 2 ou en deux parties égales, il faut qu'une de ces parties, ou le quotient, priſe deux fois, faſſe exactement le nombre propoſé; & pareillement que ſi l'on a un nombre à diviſer par 3, le quotient pris trois fois doit redonner le même nombre. Il faut en général que la multiplication du quotient par le diviſeur reproduiſe toujours le dividende.

47.

C'eſt auſſi pourquoi on preſcrit pour la diviſion la regle, de chercher un nombre ou quotient tel, qu'étant multiplié par le diviſeur, il en réſulte préciſément le dividende.

dende. Par exemple, s'il s'agit de diviſer 35 par 5, on cherche un nombre qui, multiplié par 5, produiſe 35. Or ce nombre eſt 7, puiſque cinq fois 7 fait 35. La façon de parler dont on fait uſage dans ce raiſonnement, eſt celle-ci : 5 en 35 j'ai 7 fois; & 5 fois 7 font 35.

48.

On ſe repréſente donc le dividende comme un produit, duquel un des facteurs eſt égal au diviſeur, l'autre facteur indiquant enſuite le quotient. Ainſi en ſuppoſant qu'on ait 63 à diviſer par 7, on cherchera un produit tel, qu'en prenant 7 pour un de ſes facteurs, l'autre facteur multiplié par celui-ci donne exactement 63. Or $7 \cdot 9$ eſt un tel produit, & par conſéquent 9 eſt le quotient qu'on obtient en diviſant 63 par 7.

49

S'il eſt queſtion à préſent de diviſer en général un nombre ab par a, il eſt évident

que le quotient sera b; parce que a multiplié par b redonne le dividende $a\,b$. Il est clair aussi que si l'on avoit à diviser $a\,b$ par b, le quotient seroit a.

Ainsi en général dans tous les exemples de division qu'on peut avoir faits, si l'on divise le dividende par le quotient, on obtiendra de nouveau le diviseur : de même que 24 divisé par 4 donne 6, 24 divisé par 6 donnera 4.

50.

Comme tout se réduit à représenter le dividende par deux facteurs, dont l'un soit égal au diviseur, l'autre au quotient, on comprendra facilement les exemples qui suivent. Je dis d'abord que le dividende $a\,b\,c$, divisé par a, donne $b\,c$; car a, multiplié par $b\,c$, fait $a\,b\,c$; pareillement $a\,b\,c$, étant divisé par b, on aura $a\,c$; & $a\,b\,c$, divisé par $a\,c$, donne b. Je dis aussi que $12mn$, divisé par $3m$, fait $4n$; car $3m$, multiplié par $4n$, fait $12mn$. Mais si ce

même nombre $12\,mn$ avoit dû être divisé par 12, on auroit obtenu le quotient $m\,n$.

51.

Puisque tout nombre a peut être exprimé par $1a$ ou *un* a, il est évident que si l'on avoit à diviser a ou $1a$ par 1, le quotient seroit le même nombre a. Mais au contraire, si le même nombre a ou $1a$ doit se diviser par a, le quotient sera 1.

52.

Il n'arrive pas toujours qu'on peut représenter le dividende comme le produit de deux facteurs, dont l'un soit égal au diviseur, & la division alors ne peut pas se faire de la maniere que nous avons dit.

Quand on a, par exemple, 24 à diviser par 7, on voit d'abord que le nombre 7 n'est pas un facteur de 24; car $7 \cdot 3$ ne fait que 21, & par conséquent trop peu, & $7 \cdot 4$ fait 28, qui est déjà plus grand que 24. Mais on voit du moins par-là que le quotient

doit être plus grand que 3, & plus petit que 4. Afin donc de le déterminer exactement, on emploie une autre eſpece de nombres, qu'on nomme les *fractions*, & de laquelle nous traiterons dans un des chapitres ſuivans.

53.

Avant qu'on paſſe à l'uſage des fractions, on a coutume de ſe contenter du nombre entier qui approche le plus du quotient véritable, mais en faiſant attention au *réſidu* qui reſte; ainſi l'on dit, 7 en 24 j'ai 3 fois, & le réſidu eſt 3, parce que 3 fois 7 ne fait que 21, & par conſéquent 3 de moins que 24. On conſidérera de la même maniere les exemples ſuivans:

6	34	5	c'eſt-à-dire que le diviſeur eſt	6,
	30		que le dividende eſt	34,
	4		que le quotient eſt	5,
			& que le réſidu eſt	4,

9	41 | 4	ici le diviſeur eſt	9,
	36	le dividende eſt	41,
		le quotient eſt	4,
	5	& le réſidu eſt	5.

Il faut obſerver la regle ſuivante dans les exemples où il reſte un réſidu.

54.

Quand on multiplie le diviſeur par le quotient, & qu'au produit l'on ajoute le réſidu, il faut qu'on obtienne le dividende; c'eſt la maniere de vérifier la diviſion, & de voir ſi l'on a bien calculé ou non. C'eſt ainſi que dans le premier des deux derniers exemples, ſi l'on multiplie 6 par 5, & qu'au produit 30 on ajoute le réſidu 4, il vient 34 ou le dividende.

De même dans le dernier exemple, ſi l'on multiplie le diviſeur 9 par le quotient 4, & qu'au produit 35 on ajoute le réſidu 5, on obtient le dividende 41.

55.

Il eſt enfin néceſſaire auſſi de faire remarquer ici à l'égard des ſignes $+$ *plus*, & $-$ *moins*, que ſi l'on diviſe $+ab$ par $+a$, le quotient ſera $+b$, ce qui eſt évident.

Mais que s'il s'agit de diviſer $+ab$ par $-a$, le quotient ſera $-b$; parce que $-a$ multiplié par $-b$ fait $+ab$. Enſuite :

Que ſi le dividende eſt $-ab$, & qu'il s'agiſſe de le diviſer par le diviſeur $+a$, le quotient ſera $-b$; parce que c'eſt $-b$ qui, multiplié par $+a$, fait $-ab$. Enfin, que s'il eſt queſtion de diviſer le dividende $-ab$ par le diviſeur $-a$, le quotient ſera $+b$; parce que le dividende $-ab$ eſt le produit de $-a$ par $+b$.

56.

La diviſion admet donc quant aux ſignes $+$ & $-$ les mêmes regles que nous avons

vu avoir lieu pour la multiplication ; à ſavoir :

+ par + fait + : + par — fait — :
— par + fait — : — par — fait + ;

ou en peu de mots, les mêmes ſignes donnent *plus*, les ſignes contraires donnent *moins*.

57.

Ainſi quand on diviſe $18pq$ par $-3p$, le quotient eſt $-6q$.

De plus : $-30xy$ diviſé par $+6y$ donne $-5x$;
& $-54abc$ diviſé par $-9b$ donne $+6ac$;

car, dans ce dernier exemple, $-9b$ multiplié par $+6ac$ fait $-6.9abc$, ou $-54abc$; mais nous croyons à préſent en avoir aſſez dit ſur la diviſion en quantités ſimples ; nous ne tarderons donc pas à paſſer à l'explication des fractions, après avoir ajouté encore quelques remarques ſur la nature des nombres, eu égard à leurs diviſeurs.

CHAPITRE VI.

Des propriétés des Nombres entiers par rapport à leurs diviseurs.

58.

COMME nous avons vu que quelques nombres font divifibles par de certains divifeurs, pendant que d'autres ne le font pas, il eft néceffaire pour parvenir à une connoiffance plus particuliere des nombres, de bien faire attention à cette différence, tant en diftinguant les nombres divifibles par des divifeurs de ceux qui ne le font pas, qu'en confidérant le réfidu qui refte dans la divifion de ces derniers. Pour cet effet examinons les divifeurs :

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.

59.

Soit d'abord le divifeur 2 ; les nombres qui peuvent être divifés par celui-là font : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, &c.

lesquels, comme on voit, croissent toujours de deux unités. On appelle ces nombres, quelque loin qu'ils puissent se continuer, des *nombres pairs*.

Mais il est d'autres nombres ; à savoir :

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c.

qui sont toujours d'une unité plus petits ou plus grands que ceux-là, & qu'on ne peut diviser par 2, sans qu'il reste le résidu 1 ; on nomme ceux-ci les *nombres impairs*.

Les nombres pairs sont tous compris dans la formule générale $2a$; car on les obtient tous en mettant successivement à la place de a les nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. & de là il s'ensuit que les nombres impairs sont tous compris dans la formule $2a+1$, parce que $2a+1$ est d'une unité plus grand que le nombre pair $2a$.

60.

En second lieu, soit pour diviseur le nombre 3 : les nombres divisibles par ce diviseur sont,

2, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, & ainsi de suite.

Et ces nombres peuvent ſe repréſenter par la formule $3a$; car $3a$ diviſé par 3 donne le quotient a ſans réſidu. Tous les autres nombres au contraire qu'on voudroit diviſer par 3, donneront 1 ou 2 de réſidu, & ſont par conſéquent de deux ſortes. Ceux qui après la diviſion laiſſent le reſte 1, ſont,

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c.

& ſont contenus dans la formule $3a+1$; mais l'autre eſpece, où les nombres qui donnent le reſte 2, ſont:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, &c.

& la formule qui les exprime généralement eſt $3a+2$; de façon donc que tous les nombres peuvent s'indiquer ou par $3a$, ou par $3a+1$, ou par $3a+2$.

61.

Suppoſons maintenant que 4 ſoit le diviſeur en queſtion, les nombres qu'il diviſe ſont:

4, 8, 12, 16, 20, 24, &c.

leſquels augmentent réguliérement par 4,

& ſont contenus dans la formule $4a$. Les autres nombres, c'eſt-à-dire ceux qui ne ſont pas diviſibles par 4, peuvent laiſſer le réſidu 1, ou être de 1 plus grands que ceux-là : comme

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \&c.$$

& être par conſéquent compris dans la formule $4a + 1$:
ou bien ils peuvent donner le réſidu 2 ; comme

$$2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, \&c.$$

& s'exprimer par la formule $4a + 2$; ou enfin ils donneront le reſte 3 ; comme

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \&c.$$

& ſeront indiqués par la formule $4a + 3$.

Tous les nombres entiers poſſibles ſont donc contenus dans l'une ou l'autre de ces quatre expreſſions :

$$4a, 4a + 1, 4a + 2, 4a + 3.$$

62.

Il en eſt à peu près de même quand le diviſeur eſt 5 ; car tous les nombres diviſibles par celui-là ſont contenus dans la formule $5a$, & ceux qu'on ne peut diviſer par 5, reviennent à une des formules qui ſuivent :

$$5a+1,\ 5a+2,\ 5a+3,\ 5a+4;$$

& c'eſt de la même maniere qu'on pourra continuer & conſidérer de plus grands diviſeurs.

63.

Il eſt à propos de ſe rappeler ici ce qui a été dit plus haut de la réſolution des nombres en leurs facteurs ſimples ; car tout nombre, parmi les facteurs duquel ſe trouve

2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 7,

ou un autre nombre quelconque, ſera diviſible par ces nombres. Par exemple :

60 étant autant que $2.2.3.5$,

il eſt clair que 60 eſt diviſible par 2, & par 3 & par 5 (*).

(*) Il y a quelques nombres qu'on voit aſſez facilement être diviſeurs ou non d'un nombre propoſé.

Un nombre propoſé eſt diviſible par 2, ſi le dernier chiffre eſt pair; il eſt diviſible par 4, ſi les deux derniers chiffres ſont diviſibles par 4; il eſt diviſible par 8, ſi les trois derniers chiffres ſont diviſibles par 8; & en général il eſt diviſible par 2^n, ſi les *n* derniers chiffres ſont diviſibles par 2^n.

Un nombre eſt diviſible par 3, ſi la ſomme des chiffres eſt *diviſible* par 3; il ſe diviſe par 6, ſi outre cela le dernier chiffre eſt pair; il eſt diviſible par 9, ſi la ſomme des chiffres peut ſe diviſer par 9.

Tout nombre dont le dernier chiffre eſt 0 ou 5, eſt diviſible par 5.

Un nombre eſt diviſible par 11, lorſque la ſomme du premier, du troiſieme, du cinquieme, &c. chiffre eſt égale à la ſomme du ſecond, du quatrieme, du ſixieme, &c. chiffre.

Il eſt aſſez facile de ſe rendre raiſon de ces regles, & de les étendre aux produits des diviſeurs que nous venons de conſidérer; on peut imaginer auſſi des regles pour quelques autres nombres, mais l'application en feroit ordinairement plus longue que l'eſſai de la diviſion réelle.

Je dis, par exemple, que le nombre 53704689213 eſt *diviſible par* 7, parce que je trouve que la ſomme des chiffres du nombre 64004245433 eſt diviſible par 7; c'eſt

par la table ſuivante, dans laquelle on a mis ſous chaque nombre tous ſes diviſeurs (*).

TABLE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Enfin l'on doit obſerver que o, ou *zéro*, peut être regardé comme un nombre qui

(*) On a une pareille table pour tous les diviſeurs des nombres naturels, depuis 1 juſqu'à 10000, qui a été publiée à Leyde en 1767 par M. *Henri Anjema.* On a encore une autre table de diviſeurs, qui va juſqu'à 100000; mais dans laquelle il n'y a que le plus petit diviſeur de chaque nombre. Elle ſe trouve dans le Dictionnaire Anglois de *Harris*, dans le Dictionnaire Encyclopédique & dans le Recueil de M. *Lambert*, que nous avons déjà cité à l'article 40. Elle eſt même continuée dans ce dernier Ouvrage juſqu'à 102000.

à la

a la propriété d'être divisible par tous les nombres possibles; parce que par quelque nombre *a* que l'on ait à diviser o, le quotient se trouve toujours être o; car il faut bien remarquer que la multiplication d'un nombre quelconque par *zéro* ne produit rien, & qu'ainsi o fois *a*, ou o*a*, est o.

CHAPITRE VII.

Des Fractions en général.

68.

QUAND un nombre, comme 7, par exemple, est dit n'être pas divisible par un autre nombre, supposons par 3, cela veut seulement dire que le quotient ne peut pas être exprimé par un nombre entier, & il ne faut point du tout croire qu'on ne puisse pas se faire une idée de ce quotient.

On n'a qu'à s'imaginer une ligne longue de 7 pieds, personne ne doutera qu'il ne

ſoit poſſible de diviſer cette ligne en 3 parties égales, & de ſe faire une idée de la longueur d'une de ces parties.

69.

Puis donc qu'on peut ſe faire une idée nette du quotient qu'on obtient dans des cas ſemblables, quoique ce quotient ne ſoit pas un nombre entier, on ſe trouve conduit par-là à conſidérer une eſpece particuliere de nombres, qu'on nomme *fractions* ou *nombres rompus*.

L'exemple allégué en fournit une preuve. S'il s'agit de diviſer 7 par 3, on ſe repréſente facilement le quotient qui doit en réſulter, & on l'exprime par $\frac{7}{3}$; en mettant le diviſeur ſous le dividende, & en ſéparant les deux nombres par un trait.

70.

Ainſi quand en général le nombre a doit être diviſé par le nombre b, on indique le quotient par $\frac{a}{b}$, & on appelle cette façon

de s'exprimer, une *fraction*. On ne peut donc donner mieux une idée d'une fraction $\frac{a}{b}$, qu'en disant qu'on indique de cette maniere le quotient qui provient de la division du nombre supérieur par le nombre inférieur. Il faut se souvenir aussi que dans toutes ces fractions le nombre inférieur se nomme le *dénominateur*, & que celui qui est au-dessus du trait s'appelle le *numérateur*.

71.

Dans la fraction citée, $\frac{7}{3}$, qu'on prononce sept tiers, 7 est donc le numérateur, & 3 est le dénominateur.

Il faut de même prononcer
$\frac{2}{3}$, deux tiers; $\frac{3}{4}$, trois quarts;
$\frac{3}{8}$, trois huitiemes; $\frac{12}{100}$, douze centiemes;
mais $\frac{1}{2}$ se prononce un demi, & non pas un deuxieme.

72.

Afin de parvenir à une connoissance plus parfaite de la nature des fractions, nous

commencerons par confidérer le cas où le numérateur eſt égal au dénominateur, comme dans $\frac{a}{a}$. Or puiſqu'on indique par-là le quotient qu'on obtient, quand on diviſe a par a, il eſt clair que ce quotient eſt exactement l'unité, & que par conſéquent cette fraction $\frac{a}{a}$ vaut autant que 1, ou un entier ; il s'enſuit de plus que toutes les fractions qui ſuivent :

$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}$, &c.

ſont toutes égales en valeur l'une à l'autre, valant chacune 1, ou un entier.

73.

Nous venons de voir qu'une fraction qui a le numérateur égal au dénominateur, vaut l'unité. Il faut donc que toutes les fractions dont les numérateurs ſont plus petits que les dénominateurs, aient une valeur moindre que l'unité. Car ſi j'ai un nombre à diviſer par un autre qui eſt plus grand, il me vient néceſſairement moins que 1 : une ligne, par exemple, de deux pieds de long,

devant être coupée en trois parties, une ſeule de ces parties ſera ſans contredit plus courte qu'un piéd; il eſt donc évident que $\frac{2}{3}$ eſt plus petit que 1, & cela par la même raiſon que le numérateur 2 eſt plus petit que le dénominateur 3.

74.

Si le numérateur eſt au contraire plus grand que le dénominateur, la valeur de la *fraction* eſt plus grande que l'unité. C'eſt ainſi que $\frac{3}{2}$ vaut plus que 1; car $\frac{3}{2}$ eſt autant que $\frac{2}{2}$ & encore $\frac{1}{2}$. Or $\frac{2}{2}$ eſt autant que 1, par conſéquent $\frac{3}{2}$ vaut $1\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, un entier & encore un demi. De même $\frac{4}{3}$ valent $1\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$ valent $1\frac{2}{3}$, & $\frac{7}{3}$ valent $2\frac{1}{3}$. Et en général il ſuffit dans ces cas de diviſer le nombre ſupérieur par l'inférieur, & de joindre au quotient une fraction qui ait le réſidu pour numérateur, & le diviſeur pour dénominateur. Si la fraction donnée étoit, par exemple, $\frac{43}{12}$, on auroit au quotient 3, & 7 pour réſidu; d'où l'on

concluroit que $\frac{43}{12}$ eſt la même choſe que $3\frac{7}{12}$.

75.

On voit par-là comment les fractions, dont les numérateurs ſurpaſſent les dénominateurs, ſe réſolvent en deux membres, l'un deſquels eſt un nombre entier, & l'autre un nombre rompu, dont le numérateur eſt plus petit que le dénominateur. On nomme ces fractions, qui contiennent un ou pluſieurs entiers, *des fractions impropres* par oppoſition aux fractions réelles ou proprement dites, qui ayant le numérateur plus petit que le dénominateur, ſont moindres que l'unité ou qu'un entier.

76.

On a coutume de ſe faire une idée de la nature des fractions encore d'une autre maniere, qui éclaircit aſſez bien la choſe. Si l'on conſidere, par exemple, la fraction $\frac{3}{4}$, il eſt évident qu'elle eſt trois fois plus

grande que $\frac{1}{4}$. Or cette fraction $\frac{1}{4}$ signifie que si l'on partage 1 en 4 parties égales, ce sera-là la valeur d'une de ces parties; il est donc clair qu'en prenant ensemble 3 de ces parties, on aura la valeur de la fraction $\frac{3}{4}$.

On peut considérer de la même maniere toute autre fraction, par exemple, $\frac{7}{12}$; si l'on partage l'unité en 12 parties égales, 7 de ces parties équivaudront à la fraction proposée.

77.

C'est aussi à cette maniere de représenter les fractions, que les dénominations susdites de numérateur & de dénominateur doivent leur origine. Car, comme dans la fraction précédente $\frac{7}{12}$, le nombre qui est *sous* le trait indique que c'est en 12 parties que *l'unité* doit se diviser; par conséquent, comme il désigne ou *nomme* ces parties, *on ne* l'a pas nommé sans raison *le dénominateur.*

De plus, comme le nombre supérieur, savoir 7, indique que pour avoir la valeur de la fraction il faut prendre ou rassembler 7 de ces parties, & que par conséquent il les compte pour ainsi dire, on a jugé à propos de nommer ce nombre qui est au-dessus du trait, *le numérateur.*

78.

Puisqu'il est aisé de comprendre ce que c'est que $\frac{3}{4}$, quand on sait ce que signifie $\frac{1}{4}$; nous pouvons considérer les fractions dont le numérateur est l'unité, comme faisant le fondement de toutes les autres. Telles sont les fractions

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, &c.
& il faut remarquer que ces fractions vont toujours en diminuant; car plus vous divisez un entier, ou plus le nombre des parties que vous en faites est grand, plus au contraire chacune de ces parties devient petite. C'est ainsi que $\frac{1}{100}$ est plus petit que $\frac{1}{10}$; que $\frac{1}{1000}$ plus petit que $\frac{1}{100}$; & $\frac{1}{10000}$ plus petit que $\frac{1}{1000}$.

79.

On a vu que plus on augmente le dénominateur de pareilles fractions, & plus leurs valeurs deviennent petites. On pourroit donc demander s'il ne seroit pas possible de faire ce dénominateur si grand, que la fraction se réduisit à rien ? Nous répondrons que non ; car en combien de parties, innombrables même, que vous divisiez l'unité ; par exemple, la longueur d'un pied, ces parties ne laisseront pas de conserver une certaine grandeur, & ne seront par conséquent jamais absolument rien.

80.

Il est vrai que si l'on divise la longueur d'un pied en 1000 parties, par exemple ; ces parties ne tomberont plus facilement sous nos sens. Mais regardez-les par un bon microscope, elles paroîtront assez grandes pour pouvoir être divisées encore en 100 parties & davantage.

division du dividende 1 par le diviseur ∞: Or nous savons qu'en divisant le dividende 1 par le quotient $\frac{1}{\infty}$, qui est, comme nous avons vu, autant que o, on retrouve le diviseur ∞: voici donc une nouvelle notion de l'infini que nous acquérons; nous apprenons qu'il provient de la division de 1 par o; & l'on est par conséquent fondé à dire, que 1 divisé par o indique un nombre infiniment grand ou ∞.

84.

Il est nécessaire encore ici de dissiper l'erreur assez commune de ceux qui prétendent qu'un infiniment grand n'est pas susceptible d'augmentation.

Cette opinion ne sauroit subsister avec les principes solides que nous venons d'établir; car $\frac{1}{0}$ signifiant un nombre infiniment grand, & $\frac{2}{0}$ étant incontestablement le double de $\frac{1}{0}$, il est clair qu'un nombre, quoique infiniment grand, peut devenir encore deux ou plusieurs fois plus grand.

CHAPITRE VIII.

Des propriétés des fractions.

Nous avons vu plus haut que chacune des fractions,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \text{\&c.}$$

fait un entier, & que par conséquent elles sont toutes égales entr'elles. La même égalité regne dans les fractions qui suivent,

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \text{\&c.}$$

chacune d'elles faisant deux entiers; car le numérateur de chacune divisé par son dénominateur, donne 2. De même toutes ces fractions

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}, \text{\&c.}$$

sont égales entr'elles, puisqu'elles ont 3 pour valeur commune.

88.

Nous avons vu que toute fraction peut être représentée sous une infinité de formes, dont chacune contient la même valeur ; & il est indubitable que de toutes ces formes, c'est celle qui sera composée des plus petits nombres, dont on saisira le mieux la signification. Par exemple, on pourroit mettre au lieu de $\frac{2}{3}$ les fractions suivantes,

$$\frac{4}{6},\ \frac{6}{9},\ \frac{8}{12},\ \frac{10}{15},\ \frac{12}{18},\ \&c.$$

mais il n'est pas douteux que $\frac{2}{3}$ ne soit toujours de toutes ces expressions celle dont il est le plus facile de se faire une idée. Il se présente donc ici la question comment une fraction, comme $\frac{8}{12}$, qui n'est pas exprimée par les plus petits nombres possibles, peut être réduite à sa forme la plus simple ou à *ses moindres termes*, c'est-à-dire dans notre exemple, à $\frac{2}{3}$.

89.

Il sera facile de résoudre cette question ; si l'on considere qu'une fraction ne laisse pas

pas de conſerver ſa valeur, quand on multiplie ſes deux termes, ou ſon numérateur & ſon dénominateur, par un même nombre. Car de là il s'enſuit qu'auſſi en diviſant le numérateur & le dénominateur d'une fraction par un même nombre, cette fraction doit conſerver la même valeur. Cela ſe voit encore plus clairement par le moyen de la formule générale $\frac{ma}{mb}$; car ſi l'on diviſe tant le numérateur ma, que le dénominateur mb, par le nombre m, on obtient la fraction $\frac{a}{b}$, laquelle, comme on l'a prouvé ci-deſſus, eſt égale à $\frac{ma}{mb}$.

90.

Afin donc de réduire une fraction propoſée à ſes moindres termes, il s'agit de trouver un nombre par lequel tant le numérateur que le dénominateur puiſſe être diviſé. Un nombre de cette eſpece ſe nomme un *commun diviſeur*, & auſſi long-temps qu'on peut indiquer un commun diviſeur entre le numérateur & le dénominateur,

il eſt certain que la fraction peut être réduite à une expreſſion plus petite ; mais quand on voit au contraire qu'à l'exception de l'unité aucun autre commun diviſeur ne ſauroit avoir lieu, c'eſt ſigne que la fraction ſe trouve déjà ſous la forme la plus ſimple qu'il eſt poſſible.

91.

Pour rendre ceci plus clair, conſidérons la fraction $\frac{48}{120}$. Nous voyons d'abord que les deux termes ſe diviſent par 2, & qu'il en réſulte la fraction $\frac{24}{60}$. Enſuite qu'on peut de nouveau diviſer par 2, & réduire la fraction à $\frac{12}{30}$; & celle-ci ayant encore 2 pour commun diviſeur, il eſt clair qu'on peut la réduire à $\frac{6}{15}$. Mais à préſent l'on s'apperçoit facilement que le numérateur & le dénominateur ſont encore diviſibles par 3 ; faiſant donc cette diviſion on obtient la fraction $\frac{2}{5}$, laquelle eſt égale à la fraction propoſée, & indique l'expreſſion la plus ſimple à laquelle on puiſſe la réduire ; car 2 & 5 n'ont que le commun

diviſeur 1, lequel ne peut diminuer ces nombres davantage.

92.

Cette propriété qu'ont les fractions, de garder une valeur invariable, ſoit qu'on diviſe ou qu'on multiplie le numérateur & le dénominateur par un même nombre; cette propriété, dis-je, eſt de la plus grande importance & fait le principe fondamental de tout ce qu'on enſeigne ſur les fractions. On ne peut guere, par exemple, ajouter enſemble deux fractions, ou les ſouſtraire l'une de l'autre, avant que, moyennant cette propriété, on les ait réduites à d'autres formes, c'eſt-à-dire à des expreſſions dont les dénominateurs ſoient égaux. C'eſt de quoi nous parlerons dans le chapitre ſuivant.

93.

Nous finirons celui-ci par la remarque, *qu'on peut auſſi repréſenter tous les nombres entiers par des fractions*. Par exemple, 6

eſt autant que $\frac{6}{1}$, parce que 6 diviſé par 1 fait 6 ; & on peut de la même maniere exprimer ce nombre 6 par les fractions $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{36}{6}$, & une infinité d'autres qui ont la même valeur.

CHAPITRE IX.

De l'addition & de la ſouſtraction des Fractions.

94

LORSQUE les fractions ont des dénominateurs égaux, il n'y a aucune difficulté à les ajouter & à les ſouſtraire ; car $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ eſt autant que $\frac{5}{7}$, & $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ autant que $\frac{2}{7}$. On n'opere dans ce cas, ſoit pour l'addition, ſoit pour la ſouſtraction, que ſur les numérateurs, & on met ſous le trait le dénominateur commun ; ainſi

$$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100} \text{ fait } \frac{9}{100};$$
$$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50} \text{ fait } \frac{36}{50} \text{ ou } \frac{18}{25};$$
$$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20} \text{ fait } \frac{16}{20} \text{ ou } \frac{4}{5};$$

de même $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ font $\frac{3}{3}$ ou 1, c'eſt-à-dire un entier; & $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ font $\frac{0}{4}$, c'eſt-à-dire rien, ou o.

95.

Mais quand les fractions n'ont pas des dénominateurs égaux, il eſt toujours poſſible de les transformer en d'autres fractions qui aient un même dénominateur. Par exemple, quand on propoſe d'ajouter enſemble les fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, il faut conſidérer que $\frac{1}{2}$ eſt autant que $\frac{3}{6}$, & que $\frac{1}{3}$ équivaut à $\frac{2}{6}$, nous avons donc à la place des deux fractions propoſées ces deux autres, $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, dont la ſomme fait $\frac{5}{6}$. Si les deux fractions étoient jointes par le ſigne *moins*, comme $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, on auroit $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{6}$.

Autre exemple: Soient les fractions propoſées $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$; puiſque $\frac{3}{4}$ eſt la même choſe que $\frac{6}{8}$, on peut lui ſubſtituer cette valeur & dire $\frac{6}{8}+\frac{5}{8}$ font $\frac{11}{8}$ ou 1 $\frac{3}{8}$

Suppoſez qu'on demande encore ce que donnent $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ajoutés enſemble, je dis que c'eſt $\frac{7}{12}$; car $\frac{1}{3}$ fait $\frac{4}{12}$, & $\frac{1}{4}$ fait $\frac{3}{12}$.

96.

Il peut arriver qu'on ait un plus grand nombre de fractions à réduire à un même dénominateur ; par exemp. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, tout se réduit alors à trouver un nombre qui soit divisible par tous les dénominateurs de ces fractions. 60 est ici le nombre qui a cette propriété, & qui devient par conséquent le dénominateur commun. Nous aurons donc $\frac{30}{60}$ au lieu de $\frac{1}{2}$; $\frac{40}{60}$ au lieu de $\frac{2}{3}$; $\frac{45}{60}$ au lieu de $\frac{3}{4}$; $\frac{48}{60}$ au lieu de $\frac{4}{5}$, & $\frac{50}{60}$ au lieu de $\frac{5}{6}$. S'il s'agit à présent d'ajouter ensemble toutes ces fractions $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$; on ne fait qu'ajouter tous les numérateurs, & on donne à la somme le dénominateur commun 60 ; c'est-à-dire qu'on aura $\frac{213}{60}$, ou 3 entiers & $\frac{33}{60}$, ou 3 $\frac{11}{20}$.

97.

Tout se réduit ici, nous le répétons, à transformer deux fractions dont les dénominateurs sont inégaux, en deux autres

dont les dénominateurs sont égaux. Pour faire donc cette opération d'une maniere générale, soient $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ les fractions proposées. Qu'on multiplie d'abord les deux termes de la premiere par d, on aura la fraction $\frac{ad}{bd}$ égale à $\frac{a}{b}$; qu'on multiplie ensuite les deux termes de la seconde fraction par b, on en aura une valeur équivalente exprimée par $\frac{bc}{bd}$; & voilà les deux dénominateurs devenus égaux. Maintenant si l'on demande *quelle* est la somme des deux fractions proposées, on peut répondre aussi-tôt que c'est $\frac{ad+bc}{bd}$; & s'il est question de la différence, on dit qu'elle est $\frac{ad-bc}{bd}$. S'il s'agissoit, par exemple, des fractions $\frac{5}{8}$ & $\frac{7}{9}$, on obtiendroit à leur place $\frac{45}{72}$ & $\frac{56}{72}$, dont la somme est $\frac{101}{72}$, & dont la différence est $\frac{11}{72}$.

98.

C'est à cette matiere aussi qu'appartient *la question*, laquelle de deux fractions proposées *est* la plus grande ou la plus petite? car, pour y répondre, on n'a qu'à réduire

nombres entiers & de fractions; on ajoutera d'abord les fractions, & si leur somme fait un ou plusieurs entiers, on les ajoute aux autres entiers. Qu'il soit question, par exemple, d'ajouter $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{2}{3}$, on prend d'abord la somme de $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, ou de $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{6}$. Elle est $\frac{7}{6}$ ou $1\frac{1}{6}$; donc la somme totale est $6\frac{1}{6}$.

CHAPITRE X.

De la multiplication & de la division des Fractions.

101.

LA regle pour la multiplication d'une fraction par un nombre entier, est de ne multiplier par ce nombre que le numérateur, & de ne rien changer au dénominateur; ainsi

2 fois $\frac{1}{2}$ fait $\frac{2}{2}$ ou 1 entier;
2 fois $\frac{1}{3}$ fait $\frac{2}{3}$; &

3 fois $\frac{1}{6}$ fait $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$;

4 fois $\frac{5}{12}$ fait $\frac{20}{12}$ ou 1 $\frac{8}{12}$ ou 1 $\frac{2}{3}$.

On peut cependant, au lieu de cette regle, employer auſſi celle de diviſer le dénominateur par le nombre entier donné; & il eſt bon de s'en ſervir, quand cela ſe peut, parce qu'on abrege par-là le calcul. Qu'il s'agiſſe, par exemple, de multiplier $\frac{8}{9}$ par 3; ſi l'on multiplie le numérateur par le nombre entier, on obtient $\frac{24}{9}$, lequel produit ſe réduit à $\frac{8}{3}$. Mais ſi l'on ne change rien au numérateur & que l'on diviſe le dénominateur par le nombre entier, on trouve immédiatement $\frac{8}{3}$ ou 2 $\frac{2}{3}$ pour le produit cherché. De même $\frac{13}{24}$ multipliés par 6 donnent $\frac{13}{4}$ ou 3 $\frac{1}{4}$.

102.

En général donc, le produit de la multiplication d'une fraction $\frac{a}{b}$ par c eſt $\frac{ac}{b}$, & on peut remarquer que quand le nombre entier eſt préciſément égal au dénominateur, le produit doit être égal au numérateur.

En effet

$\frac{1}{2}$ pris 2 fois donne 1 ;

$\frac{2}{3}$ pris 3 fois donne 2 ;

$\frac{3}{4}$ pris 4 fois donne 3.

Et en général, ſi l'on multiplie la fraction $\frac{a}{b}$ par le nombre b, le produit doit être a, comme on l'a déjà fait ſentir plus haut; car puiſque $\frac{a}{b}$ indique le quotient de la diviſion du dividende a par le diviſeur b, & qu'on a démontré que le quotient multiplié par le diviſeur doit donner le dividende, il eſt clair que $\frac{a}{b}$ multiplié par b doit produire a.

103.

Nous avons vu comment on doit multiplier une fraction par un nombre entier, voyons à préſent auſſi comment il faut diviſer une fraction par un nombre entier; cette recherche eſt néceſſaire avant que nous paſſions à la multiplication des fractions par des fractions. Or il eſt clair que ſi j'ai à diviſer la fraction $\frac{2}{3}$ par 2, il doit

me venir $\frac{1}{3}$; & que le quotient de $\frac{6}{7}$ divisé par 3 est $\frac{2}{7}$. La regle est donc, qu'il faut diviser le numérateur par le nombre entier sans changer le dénominateur. Ainsi :

$\frac{12}{25}$ divisé par 2 donne $\frac{6}{25}$; &
$\frac{12}{25}$ divisé par 3 donne $\frac{4}{25}$; &
$\frac{12}{25}$ divisé par 4 donne $\frac{3}{25}$, &c.

104.

Cette regle peut être pratiquée sans difficulté, pourvu que le numérateur soit divisible par le nombre proposé ; mais fort souvent il ne l'est pas ; il faut donc observer qu'on peut transformer une fraction en un nombre infini d'autres expressions, & que dans ce nombre il ne peut manquer d'y en avoir de telles, que le numérateur puisse être divisé par le nombre entier donné. S'il s'agissoit, par exemple, de diviser $\frac{3}{4}$ par 2, on changeroit la fraction en $\frac{6}{8}$, & divisant maintenant le numérateur par 2, on auroit *aussi-tôt* $\frac{3}{8}$ pour le quotient cherché.

En général, s'il est question de diviser

la fraction $\frac{a}{b}$ par c, on la transformera en celle-ci $\frac{ac}{bc}$, & divisant ensuite le numérateur ac par c, on écrira $\frac{a}{bc}$ pour le quotient cherché.

105.

Nous voyons donc que dans le cas où une fraction $\frac{a}{b}$ doit être divisée par un nombre entier c, on n'a qu'à multiplier le dénominateur par ce nombre, & laisser le numérateur tel qu'il est. C'est ainsi que $\frac{5}{8}$ divisé par 3 fait $\frac{5}{24}$, & que $\frac{9}{16}$ divisé par 5 fait $\frac{9}{80}$.

Ce calcul devient cependant plus facile quand le numérateur lui-même est divisible par le nombre entier, comme nous l'avons supposé à l'article 103. Par exemple $\frac{9}{16}$ divisé par 3 feroit, suivant notre derniere regle, $\frac{9}{48}$ mais par la premiere regle, qui est applicable ici, on a $\frac{3}{16}$, expression qui équivaut à $\frac{9}{48}$, mais qui est plus simple.

106.

On ſera maintenant en état de comprendre comment il faut multiplier une fraction $\frac{a}{b}$ par une autre fraction $\frac{c}{d}$. On n'a qu'à conſidérer que $\frac{c}{d}$ ſignifie que c eſt diviſé par d; & en partant de là, on multipliera d'abord la fraction $\frac{a}{b}$ par c, ce qui produit le réſultat $\frac{ac}{b}$; après quoi on diviſera par d ce qui donne $\frac{ac}{bd}$. Nous tirons de là la regle ſuivante, que pour multiplier deux fractions, on n'a beſoin que de multiplier ſéparément les numérateurs & les dénominateurs. Ainſi

$\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{3}$ donne le produit $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$;
$\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ fait $\frac{8}{15}$; &
$\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{12}$ produit $\frac{15}{48}$ ou $\frac{5}{16}$, &c.

107.

Il nous reſte à montrer comment on doit diviſer une fraction par une autre. Il faut remarquer d'abord que ſi les deux fractions ont le même nombre pour dénominateur,

la divifion n'a lieu qu'à l'égard des numérateurs ; car il eft évident, par exemple, que $\frac{3}{12}$ font contenus autant de fois dans $\frac{9}{12}$, que 3 l'eft dans 9, c'eft-à-dire, 3 fois ; & pareillement pour divifer $\frac{8}{12}$ par $\frac{9}{12}$, on n'a qu'à divifer 8 par 9, ce qui donne $\frac{8}{9}$. On aura de même $\frac{6}{20}$ en $\frac{18}{20}$, 3 fois ; $\frac{7}{100}$ en $\frac{49}{100}$, 7 fois ; $\frac{7}{25}$ en $\frac{6}{25}$, $\frac{6}{7}$, &c.

108.

Mais quand les fractions n'ont pas leurs dénominateurs égaux, il faut avoir recours à la maniere dont nous avons dit qu'on les réduifoit au même dénominateur. Qu'on ait, par exemple, la fraction $\frac{a}{b}$ à divifer par la fraction $\frac{c}{d}$, on les réduira d'abord au même dénominateur, & l'on aura $\frac{ad}{bd}$ à divifer par $\frac{bc}{bd}$; & il eft clair à préfent que le quotient doit être indiqué fimplement par la divifion de ad par bc; ce qui donne $\frac{ad}{bc}$.

Voici donc la regle : il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur

nateur du diviſeur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur; le premier produit ſera le numérateur du quotient, & le ſecond produit ſera ſon dénominateur.

109.

Ainſi, en ſuivant cette regle pour diviſer $\frac{5}{8}$ par $\frac{2}{3}$, on aura le quotient $\frac{15}{16}$; la diviſion de $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$ produira $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$, ou 1 & $\frac{1}{2}$; & celle de $\frac{25}{48}$ par $\frac{5}{6}$ donnera $\frac{150}{240}$ ou $\frac{5}{8}$.

110.

On a coutume auſſi de préſenter cette regle pour la diviſion d'une maniere plus facile à retenir, que voici : Si l'on renverſe la fraction par laquelle il s'agit de diviſer, de façon que le dénominateur ſe mette à la place du numérateur, & que celui-ci s'écrive ſous le trait, & qu'enſuite on multiplie la fraction, qui eſt le dividende, par cette fraction renverſée, le produit ſera le quotient cherché. Ainſi $\frac{3}{4}$ diviſé par $\frac{1}{2}$ eſt autant que $\frac{3}{4}$ multiplié par $\frac{2}{1}$, ce qui fait $\frac{6}{4}$ ou

nous avons établis plus haut pour les nombres entiers. Ainsi $+\frac{1}{2}$ multiplié par $-\frac{1}{5}$, fait $-\frac{1}{6}$; & $-\frac{2}{3}$ multiplié par $-\frac{4}{5}$, donne $+\frac{8}{15}$. De plus $-\frac{5}{8}$ divisé par $+\frac{2}{3}$, fait $-\frac{15}{16}$; & $-\frac{3}{4}$ divisé par $-\frac{3}{4}$, fait $+\frac{12}{12}$ ou $+1$.

CHAPITRE XI.

Des Nombres quarrés.

115.

LE produit d'un nombre multiplié par le même nombre, se nomme un *quarré*; & par cette raison on appelle *racine quarrée* ce nombre considéré relativement à un tel produit.

Par exemple, quand on multiplie 12 par 12, le produit 144 est un quarré dont la racine est 12.

Le fondement de cette dénomination est pris dans la Géométrie, où l'on trouve le contenu d'un quarré en multipliant son côté par lui-même.

116.

Tous les nombres quarrés se trouvent donc par la multiplication ; c'est-à-dire, en multipliant la racine par elle-même.

C'est ainsi que 1 est le quarré de 1, parce que 1 multiplié par 1 fait 1 ; & pareillement, que 4 est le quarré de 2, & 9 le quarré de 3 ; que 2 est la racine de 4, & 3 celle de 9.

Nous considérerons en premier lieu les quarrés des nombres naturels, & nous donnerons d'abord la petite table qui suit, dans laquelle plusieurs nombres ou racines se trouvent sur la premiere ligne, & leurs quarrés sur la seconde (*).

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

(*) Nous avons des tables très-complettes pour les *quarrés des nombres* naturels, publiées sous le titre de *Tetragonometria Tabularia*, *&c. auctore* J. JOBO LUDOLFO. Amstelodami, 1690, *in*-4.° Ces tables vont depuis 1

117.

On remarquera d'abord sans peine dans ces nombres quarrés rangés ainsi par ordre, une belle propriété ; à savoir que, si l'on soustrait chacun de ces quarrés de celui qui suit immédiatement, les restes augmentent toujours de 2, & forment la suite que voici :

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, &c.
qui est celle des nombres impairs.

118.

Les quarrés des fractions se trouvent pareillement, en multipliant une fraction donnée par elle-même. Par exemple, le quarré de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{4}$, &

$\frac{1}{3}$ a pour quarré $\frac{1}{9}$;
$\frac{2}{3}$ — — — — $\frac{4}{9}$;

jusqu'à 100000, non-seulement pour trouver ces quarrés, mais aussi les produits de deux nombres quelconques moindres que 100000 ; sans parler de différens autres usages qui sont détaillés dans l'Introduction qui est à la tête de l'Ouvrage.

$\frac{1}{4}$ a pour quarré $\frac{1}{16}$;

$\frac{3}{4}$ — — — — — $\frac{9}{16}$, & ainsi de suite.

On voit assez qu'il suffit de diviser le quarré du numérateur par le quarré du dénominateur, & que la fraction qui exprime cette division, doit être le quarré de la fraction donnée. C'est ainsi encore que $\frac{25}{64}$ est le quarré de $\frac{5}{8}$; & réciproquement que $\frac{5}{8}$ est la racine de $\frac{25}{64}$.

119.

Quand on veut trouver le quarré d'un nombre mixte, ou composé d'un nombre entier & d'une fraction, on n'a qu'à le réduire à une seule fraction, & prendre ensuite le quarré de cette fraction. Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver le quarré de $2\frac{1}{2}$; on exprimera d'abord ce nombre par $\frac{5}{2}$, & prenant le quarré de cette fraction, on a $\frac{25}{4}$ ou $6\frac{1}{4}$ pour la valeur du quarré de $2\frac{1}{2}$. De même pour prendre le quarré de $3\frac{1}{4}$, on dira: $3\frac{1}{4}$ est autant que $\frac{13}{4}$; donc son quarré est égal à $\frac{169}{16}$, ou à 10 & $\frac{9}{16}$. Voici

pour chaque quart d'augmentation les quarrés des nombres compris entre 3 & 4.

Nombres	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quarrés	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{6}$	16

On peut conclure de cette petite table, que si une racine contient une fraction, son quarré ne manque pas d'en contenir une aussi. Soit, par exemple, la racine $1\frac{5}{12}$; son quarré est $\frac{289}{144}$, ou $2\frac{1}{144}$; c'est-à-dire un peu plus grand que le nombre entier 2.

120.

Passons aux expressions générales. Quand la racine est a, le quarré doit être aa; si la racine est $2a$, le quarré est $4aa$; ce qui donne à connoître qu'en doublant la racine, le quarré devient 4 fois plus grand. De même, si la racine est $3a$, le quarré est $9aa$; & si la racine est $4a$, le quarré est $16aa$. Mais si la racine est ab, le quarré est $aabb$; & si la racine est abc, le quarré est $aabbcc$.

121.

Ainſi, quand la racine eſt compoſée de deux ou de pluſieurs facteurs, il faut multiplier enſemble leurs quarrés; & réciproquement, ſi un quarré eſt compoſé de deux ou de pluſieurs facteurs, dont chacun eſt un quarré, on n'a qu'à multiplier enſemble les racines de ces quarrés, pour avoir la racine complette du quarré propoſé. Ainſi, comme 2304 eſt autant que 4.16.36, la racine quarrée en eſt 2.4.6 ou 48; & en effet 48 ſe trouve être la racine quarrée de 2304, parce que 48.48 fait 2304.

122.

Voyons auſſi ce qu'il faut obſerver dans cette matiere à l'égard des ſignes + & —. Et d'abord il eſt clair que ſi la racine a le ſigne +, c'eſt-à-dire qu'elle eſt un nombre poſitif, ſon quarré doit néceſſairement être de même un nombre poſitif, parce que + par + fait +: le quarré de $+a$

ſera $+ aa$. Mais ſi la racine eſt un nombre négatif, comme $- a$, le quarré n'en devient pas moins poſitif, puiſqu'il eſt $+ aa$; nous pouvons donc conclure que $+ aa$ eſt le quarré tant de $+ a$ que de $- a$, & que par conſéquent on peut indiquer pour tout quarré deux racines, l'une poſitive & l'autre négative. La racine quarrée de 25, par exemple, eſt également $+ 5$ & $- 5$, parce que $- 5$ multiplié par $- 5$ donne 25 auſſi bien que $+ 5$ par $+ 5$.

CHAPITRE XII.

Des Racines quarrées & des Nombres irrationnels qui en réſultent.

123.

CE que nous avons dit dans le chapitre précédent revient principalement à ceci: Que la racine quarrée d'un nombre propoſé n'eſt autre choſe qu'un nombre tel

que ſon quarré ſoit égal au nombre propoſé, & qu'on peut mettre devant ces racines tant le ſigne poſitif que le ſigne négatif.

124.

Ainſi quand un nombre propoſé eſt un quarré, & qu'on a retenu dans la mémoire un nombre ſuffiſant de nombres quarrés, il eſt facile de trouver la racine de celui qui eſt donné. Si c'eſt 196, par exemple, qui ſoit ce nombre propoſé, on ſait que ſa racine quarrée eſt 14.

On traite de même avec facilité les fractions : il eſt clair, par exemple, que $\frac{5}{7}$ eſt la racine quarrée de $\frac{25}{49}$; on n'a, pour s'en convaincre, qu'à prendre la racine quarrée du numérateur, & celle du dénominateur.

Si le nombre propoſé eſt un nombre mixte, comme $12\frac{1}{4}$, on le réduira à une ſeule fraction, laquelle eſt ici $\frac{49}{4}$, & on verra ſur le champ que c'eſt $\frac{7}{2}$ ou $3\frac{1}{2}$, qui doit être la racine quarrée de $12\frac{1}{4}$.

125

Mais quand le nombre proposé n'est pas un quarré, comme 12 par exemple, il n'est pas possible non plus d'en extraire la racine quarrée, ou d'indiquer un nombre tel que, multiplié par lui-même, il donne le produit 12. Ce que nous savons cependant, c'est que la racine quarrée de 12 doit être plus grande que 3, parce que 3.3 ne font que 9; & plus petite que 4, parce que 4.4 font 16, c'est-à-dire plus de 12. Nous savons même aussi que cette racine est plus petite que $3\frac{1}{2}$; car nous avons vu que le quarré de $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ est $12\frac{1}{4}$. Enfin nous pouvons déterminer cette racine d'une maniere encore plus approchée, en la comparant avec $3\frac{7}{15}$; car le quarré de $3\frac{7}{15}$ ou de $\frac{52}{15}$ est $\frac{2704}{225}$ ou 12 & $\frac{4}{225}$, par conséquent cette fraction est encore un peu plus grande que la racine qu'on demande; mais de très-peu, puisque les deux quarrés ne different entr'eux que de $\frac{4}{225}$.

126.

On pourroit soupçonner que puisque $3\frac{1}{2}$ & $3\frac{7}{15}$ sont des nombres plus grands que la racine de 12, il seroit possible d'ajouter à 3 une fraction un peu plus petite que $\frac{1}{15}$, & précisément telle que le quarré de la somme fût égal à 12.

Essayons donc avec $3\frac{3}{7}$, puisque $\frac{3}{7}$ est un peu moindre que $\frac{7}{15}$. Or $3\frac{3}{7}$ est autant que $\frac{24}{7}$, dont le quarré est $\frac{576}{49}$, & par conséquent plus petit de $\frac{12}{49}$ que le quarré de 12, qu'on peut exprimer par $\frac{588}{49}$. Il est donc prouvé que $3\frac{3}{7}$ est plus petit, & que $3\frac{7}{15}$ est plus grand que la racine cherchée. Essayons donc un nombre un peu plus grand que $3\frac{3}{7}$, mais pourtant plus petit que $3\frac{7}{51}$, par exemp. $3\frac{5}{11}$. Ce nombre qui vaut $\frac{38}{11}$, a pour quarré $\frac{1444}{121}$. Or en réduisant 12 à ce dénominateur on trouve $\frac{1452}{121}$; il s'ensuit donc que $3\frac{5}{11}$ est encore plus petit que la racine de 12, à savoir de $\frac{8}{121}$. Substituons donc à $\frac{5}{11}$ la fraction $\frac{6}{13}$, qui est un peu plus grande,

129.

Ces quantités irrationnelles, quoiqu'elles ne puissent pas s'exprimer par des fractions, sont cependant des grandeurs dont on peut se faire une idée juste. Car quelque cachée que nous paroisse, par exemple, la racine de 12, nous n'ignorons pas cependant que c'est un nombre qui, multiplié par lui-même, produit exactement 12; & cette propriété est suffisante pour nous donner une idée de ce nombre, d'autant qu'il dépend de nous d'approcher de plus en plus de sa valeur.

130.

Comme on est donc suffisamment au fait de la signification des nombres irrationnels dont il est question, on est convenu d'un certain signe, pour indiquer les racines quarrées des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits. Ce signe a cette figure $\sqrt{}$, & se prononce en effet *racine quarrée*. Ainsi $\sqrt{12}$ signifie la racine quarrée de 12, ou le

le nombre qui, multiplié par lui-même, fait 12. De même, $\sqrt{2}$ indique la racine quarrée de 2; $\sqrt{3}$, celle de 3; $\sqrt{\frac{2}{3}}$, la racine quarrée de $\frac{2}{3}$; & en général $\sqrt{a}$ indique la racine quarrée du nombre *a*. Toutes les fois donc qu'on voudra indiquer la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas un quarré, on n'aura qu'à ſe ſervir de la marque $\sqrt{}$ en la mettant devant ce nombre.

131.

L'explication que nous avons donnée des nombres irrationnels, nous met auſſitôt ſur la voie pour appliquer à ces nombres les calculs uſités. Car ſachant, par exemple, que la racine quarrée de 2, multipliée par elle-même, doit produire 2; nous ſavons auſſi que la multiplication de $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}$ doit produire néceſſairement 2; que de même celle de $\sqrt{3}$ par $\sqrt{3}$ doit donner 3; que $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ fait 5; que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ par $\sqrt{\frac{2}{3}}$ fait $\frac{2}{3}$; & que généralement $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{a}$ produit *a*.

132.

Mais quand il s'agit de multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, le produit eſt $\sqrt{ab}$; parce que nous avons montré plus haut que ſi un quarré a des facteurs, ſa racine doit être composée des racines de ces facteurs. C'eſt pourquoi l'on trouve la racine quarrée du produit ab, laquelle eſt $\sqrt{ab}$, en multipliant la racine quarrée de a ou $\sqrt{a}$, par la racine quarrée de b, ou par $\sqrt{b}$. Il eſt clair par-là que ſi b étoit égal à a, on auroit $\sqrt{aa}$ pour le produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$. Or $\sqrt{aa}$ eſt évidemment a, parce que aa eſt le quarré de a.

133.

S'il s'agit de la diviſion, & qu'on ait $\sqrt{a}$, par exemple, à diviſer par $\sqrt{b}$, on obtient $\sqrt{\frac{a}{b}}$; & il peut arriver ici que dans le quotient l'irrationalité s'évanouiſſe. C'eſt ainſi qu'ayant à diviſer $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, on obtient le quotient $\sqrt{\frac{18}{8}}$, lequel ſe réduit à

$\sqrt{\frac{9}{4}}$, & par conséquent à $\frac{3}{2}$, parce que $\frac{9}{4}$ est le quarré de $\frac{3}{2}$.

134.

Quand le nombre devant lequel on a mis le signe radical $\sqrt{}$, est lui-même un quarré, on en exprime la racine de la maniere accoutumée. Ainsi $\sqrt{4}$ est autant que 2, $\sqrt{9}$ autant que 3, $\sqrt{36}$ autant que 6, & $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ autant que $\frac{7}{2}$ ou $3\frac{1}{2}$. On voit que dans ces cas l'irrationalité n'est qu'apparente, & qu'elle disparoît d'elle-même.

135.

Il est facile aussi de multiplier nos nombres irrationnels par les nombres ordinaires. Par exemple, 2 multiplié par $\sqrt{5}$ fait $2\sqrt{5}$, & 3 fois $\sqrt{2}$ fait $3\sqrt{2}$. Dans ce second exemple cependant, comme 3 est autant que $\sqrt{9}$, on peut exprimer aussi 3 fois $\sqrt{2}$ par $\sqrt{9}$ multipliant $\sqrt{2}$, ou par $\sqrt{18}$. De même $2\sqrt{a}$ est autant que $\sqrt{4a}$, & $3\sqrt{a}$ autant que $\sqrt{9a}$. Et en général

$b\sqrt{a}$ a la même valeur que la racine quarrée de bba ou $\sqrt{abb}$; d'où l'on infere réciproquement, que quand le nombre qui eſt précédé du ſigne radical contient un quarré, on peut prendre la racine de ce quarré & la mettre devant le ſigne, comme on feroit en écrivant $b\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt{bba}$. On comprendra aiſément d'après cela les réductions qui ſuivent :

$\sqrt{8}$ ou $\sqrt{2.4}$ eſt autant que $2\sqrt{2}$;
$\sqrt{12}$ ou $\sqrt{3.4}$ — — — $2\sqrt{3}$;
$\sqrt{18}$ ou $\sqrt{2.9}$ — — — $3\sqrt{2}$;
$\sqrt{24}$ ou $\sqrt{6.4}$ — — — $2\sqrt{6}$;
$\sqrt{32}$ ou $\sqrt{2.16}$ — — — $4\sqrt{2}$;
$\sqrt{75}$ ou $\sqrt{3.25}$ — — — $5\sqrt{3}$;

136.

La diviſion eſt fondée ſur les mêmes principes. $\sqrt{a}$ diviſé par $\sqrt{b}$, fait $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ou $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Et pareillement

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ eſt autant que $\sqrt{\frac{8}{2}}$ ou $\sqrt{4}$ ou 2;
$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ — — — — $\sqrt{\frac{18}{2}}$ ou $\sqrt{9}$ ou 3;
$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ — — — — $\sqrt{\frac{12}{3}}$ ou $\sqrt{4}$ ou 2.

De plus

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ eſt autant que $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{\frac{4}{2}}$ ou $\sqrt{2}$;

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ — — — — $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$ ou $\sqrt{\frac{9}{3}}$ ou $\sqrt{3}$;

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ — — — — $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$ ou $\sqrt{\frac{144}{6}}$, ou $\sqrt{24}$ ou $\sqrt{6.4}$, ou enfin $2\sqrt{6}$.

137.

Il n'y a rien à remarquer de particulier à l'égard de l'addition & de la ſouſtraction, parce qu'on ne fait que lier les nombres par les ſignes $+$ & $-$. Par exemple, $\sqrt{2}$ ajouté à $\sqrt{3}$ s'écrit $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; & $\sqrt{3}$ ſouſtrait de $\sqrt{5}$ s'écrit $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

138.

Enfin nous ferons obſerver que par oppoſition à ces nombres irrationnels, on nomme les autres nombres, tant entiers que fractionnaires, des *nombres rationnels.*

Ainſi toutes les fois qu'on parle de nombres rationnels, on entend par-là des nombres entiers, ou bien auſſi des fractions.

CHAPITRE XIII.

Des Quantités impoſſibles ou imaginaires, qui dérivent de la même ſource.

139.

Nous avons déjà vu plus haut que les quarrés des nombres, tant poſitifs que négatifs, ſont toujours poſitifs ou affectés du ſigne +; ayant fait obſerver que $-a$ multiplié par $-a$ fait $+aa$, tout comme le produit de $+a$ par $+a$. C'eſt pourquoi, dans le chapitre précédent, nous avons ſuppoſé que tous les nombres dont il s'agiſſoit d'extraire les racines quarrées, étoient poſitifs.

140.

Quand il arrive donc qu'il ſoit queſtion d'extraire la racine d'un nombre négatif, on ne peut que ſe trouver fort embarraſſé, n'y ayant aucun nombre aſſignable dont le

quarré ſoit un nombre négatif. Car ſuppoſez, par exemple, qu'on voulût extraire la racine de — 4, ce ſeroit demander un nombre tel que, multiplié par lui-même, il donnât — 4; or ce nombre cherché n'eſt ni + 2 ni — 2, parce que le quarré, tant de + 2 que de — 2, eſt + 4 & non pas — 4.

141.

Il faut donc conclure que la racine quarrée d'un nombre négatif ne péut être ni un nombre poſitif, ni un nombre négatif, puiſqu'auſſi les quarrés des nombres négatifs prennent le ſigne *plus*. Par conſéquent il faut que la racine en queſtion appartienne à une eſpece tout-à-fait particuliere de nombres; puiſqu'elle ne peut être comptée ni parmi les nombres poſitifs, ni parmi les nombres négatifs.

142.

Or nous avons remarqué plus haut que les nombres poſitifs ſont tous plus grands

que rien ou o., & que les nombres négatifs ſont tous plus petits que rien ou o; de façon que tout ce qui ſurpaſſe o s'exprime par des nombres poſitifs, & que tout ce qui eſt moindre que o, s'exprime par des nombres négatifs. Nous voyons donc que les racines quarrées de nombres négatifs ne ſont ni plus grandes ni plus petites que rien. Cependant on ne peut pas dire qu'elles ſoient o; car o multiplié par o fait o, & par conſéquent ne donne pas un nombre négatif.

143.

Or puiſque tous les nombres qu'il eſt poſſible de s'imaginer, ſont ou plus grands ou plus petits que o, ou ſont o même, il eſt clair qu'on ne peut pas même compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres poſſibles, & il faut donc dire que c'eſt une quantité impoſſible. C'eſt de cette façon que nous ſommes conduits à l'idée de nombres qui par leur nature ſont

impossibles. On nomme ordinairement ces nombres des *quantités imaginaires*, parce qu'elles existent purement dans l'imagination.

144.

Toutes les expressions, comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, &c. sont par conséquent des nombres impossibles ou imaginaires, puisqu'ils indiquent des racines de quantités négatives. Et c'est de pareils nombres qu'on soutient avec raison qu'ils ne sont ni rien, ni plus que rien, ni moins que rien; ce qui fait principalement qu'on est obligé de les déclarer impossibles.

145.

Avec tout cela cependant ces nombres se présentent à l'esprit, ils ont lieu dans notre imagination, & nous ne laissons pas d'en avoir une idée suffisante; puisque nous savons que par $\sqrt{-4}$, par exemple, on entend un nombre qui, multiplié par lui-même, fait -4. C'est aussi pourquoi rien

ne nous empêche d'appliquer le calcul à ces nombres imaginaires, & de les employer.

146.

Notre premiere notion dans la matiere que nous traitons, eſt que le quarré de $\sqrt{-3}$, par exemple, ou le produit de $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{-3}$, eſt -3; que celui de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$, fait -1; & en général, qu'en multipliant $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$, ou en prenant le quarré de $\sqrt{-a}$, on obtient $-a$.

147.

Maintenant, comme $-a$ ſignifie autant que $+a$ multiplié par -1, & que la racine quarrée d'un produit ſe trouve en multipliant enſemble les racines des facteurs, il s'enſuit que la racine de a multipliée par -1, ou $\sqrt{-a}$, eſt autant que $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{-1}$. Or $\sqrt{a}$ eſt un nombre poſſible ou réel, par conſéquent ce qu'il y a d'impoſſible dans une quantité imagi-

naire, peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raison donc, $\sqrt{-4}$ est autant que $\sqrt{4}$ multipliée par $\sqrt{-1}$, & autant que $2\sqrt{-1}$, à cause de $\sqrt{4}$ égal à 2. Par la même raison $\sqrt{-9}$ se réduit à $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, ou à $3\sqrt{-1}$; & $\sqrt{-16}$ signifie $4\sqrt{-1}$.

148.

De plus, comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$; & $\sqrt{4}$ ou 2, pour la valeur du produit de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-4}$. On voit donc que deux nombres imaginaires, multipliés l'un par l'autre, en produisent un réel ou possible.

Mais au contraire un nombre possible, multiplié par un nombre impossible, donne toujours de l'imaginaire : $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{+5}$ fait $\sqrt{-15}$.

149.

Il en est de même à l'égard de la division; car $\sqrt{a}$ divisé par $\sqrt{b}$ faisant $\sqrt{\frac{a}{b}}$,

il eſt clair que $\sqrt{-4}$ diviſé par $\sqrt{-1}$ fera $\sqrt{+4}$ ou 2 ; que $\sqrt{+3}$ diviſé par $\sqrt{-3}$ fera $\sqrt{-1}$; & que 1 diviſé par $\sqrt{-1}$ me donne $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ ou $\sqrt{-1}$; parce que 1 eſt autant que $\sqrt{+1}$.

150.

Nous avons obſervé plus haut que la racine quarrée d'un nombre quelconque a toujours deux valeurs, l'une poſitive & l'autre négative ; que $\sqrt{4}$, par exemple, eſt également $+2$ & -2, & qu'en général on peut adopter $-\sqrt{a}$ comme $+\sqrt{a}$ pour la racine quarrée de a. Cette remarque a lieu auſſi, quand il s'agit de nombres imaginaires : la racine quarrée de $-a$ eſt également $+\sqrt{-a}$ & $-\sqrt{-a}$; mais il faut ſe garder de confondre les ſignes $+$ & $-$ qui ſont devant le ſigne radical $\sqrt{}$, & le ſigne qui ne vient qu'après cette marque $\sqrt{}$.

151.

Il nous reſte enfin à lever le doute qu'on pourroit avoir ſur l'utilité des nombres dont nous venons de parler ; car en effet ces nombres étant impoſſibles, il ne ſeroit pas étonnant qu'on les crût tout-à-fait inutiles & l'objet ſeulement d'une vaine ſpéculation. On ſe tromperoit cependant ; le calcul des imaginaires eſt de la plus grande importance ; ſouvent il ſe préſente des queſtions, deſquelles on ne ſauroit dire ſur le champ ſi elles renferment quelque choſe de réel & de poſſible ou non. Or quand la ſolution d'une pareille queſtion nous conduit à des nombres imaginaires, nous ſommes certains que ce qu'on demande eſt impoſſible.

Afin d'éclaircir ce que nous venons de dire par un exemple, ſuppoſons qu'on propoſe la queſtion : de diviſer le nombre 12 en deux parties, telles que le produit de ces parties faſſe 40. Si l'on réſout cette

queſtion par les regles ordinaires, on trouve pour les parties cherchées $6 + \sqrt{-4}$ & $6 - \sqrt{-4}$; mais ces nombres ſont imaginaires : on conclut donc par cela même qu'il eſt impoſſible de réſoudre la queſtion.

On ſaiſira facilement la différence, en ſuppoſant que la queſtion eût été de diviſer 12 en deux parties qui, multipliées enſemble, fiſſent 35; car il eſt évident que ces parties ſeroient 7 & 5.

CHAPITRE XIV.

Des Nombres Cubiques.

152.

QUAND un nombre a été multiplié trois fois par lui-même, ou, ce qui revient au même, que le quarré d'un nombre a été multiplié encore une fois par ce nombre, on a un produit qui ſe nomme un *cube* ou un *nombre cubique*. C'eſt ainſi

que le cube de a eſt aaa, vu que c'eſt ce qu'on obtient en multipliant a par ſoi-même, ou par a, & enſuite ce quarré aa encore par a.

On voit par-là que les cubes des nombres naturels doivent ſe ſuivre dans l'ordre que voici (*):

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubes	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

153.

Si nous conſidérons les différences de ces nombres cubiques, comme nous l'avons fait pour les quarrés, en ſouſtrayant chaque cube de celui qui le ſuit, nous obtenons la ſuite de nombres que voici:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

nous ne remarquons d'abord aucune régu-

(*) On doit à un Mathématicien, nommé *J. Paul Buchner*, des tables publiées à Nuremberg en 1701, dans leſquelles on trouve tant les quarrés que les cubes de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 12000.

larité dans cette ſuite ; mais ſi nous prenons les différences de ces nombres, nous voyons ſe former la ſérie ſuivante :

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54;

dans laquelle les termes augmentent toujours évidemment de 6.

154.

Après la définition que nous avons donnée du cube, il ne ſera pas difficile de trouver les cubes des nombres fractionnaires : on verra que $\frac{1}{8}$ eſt le cube de $\frac{1}{2}$; que $\frac{1}{27}$ eſt le cube de $\frac{1}{3}$, & que $\frac{8}{27}$ eſt celui de $\frac{2}{3}$. En effet on n'a qu'à prendre ſéparément le cube du numérateur & celui du dénominateur, on aura $\frac{27}{64}$ pour le cube de la fraction $\frac{3}{4}$.

155.

Si c'eſt d'un nombre mixte qu'il s'agit de trouver le cube, il faut d'abord le réduire en une ſeule fraction, & procéder enſuite comme il a été dit. Pour trouver, par exemple, le cube de $1\frac{1}{2}$, il faut prendre celui

celui de $\frac{3}{2}$, qui eſt $\frac{27}{8}$, ou 3 & $\frac{3}{8}$. De même le cube de $1\frac{1}{4}$, ou de la fraction ſeule $\frac{5}{4}$, eſt $\frac{125}{64}$ ou 1 & $\frac{61}{64}$, & le cube de $3\frac{1}{4}$ ou de $\frac{13}{4}$ eſt $\frac{2197}{64}$, ou $34\frac{21}{64}$.

156.

Puiſque aaa eſt le cube de a, celui du nombre ab ſera $aaabbb$; d'où l'on voit que ſi un nombre a deux ou pluſieurs facteurs, on peut trouver ſon cube en multipliant enſemble les cubes de ces facteurs. Par exemple, comme 12 eſt autant que 3.4, on multiplie le cube de 3, qui eſt 27, par le cube de 4, qui eſt 64, & on obtient 1728, cube de 12. On voit de plus que le cube de $2a$ eſt $8aaa$, & par conſéquent 8 fois plus grand que le cube de a; & de même, que le cube de $3a$ eſt $27aaa$, c'eſt-à-dire qu'il eſt 27 fois plus grand que le cube de a.

157.

Faiſons attention auſſi aux ſignes + & −. Il eſt clair d'abord que le cube d'un

nombre positif $+a$ ne peut qu'être positif de même ; c'est-à-dire $+aaa$. Mais s'il s'agit de prendre le cube d'un nombre négatif $-a$, on verra qu'en prenant d'abord le quarré, lequel est $+aa$, & multipliant ensuite, selon la regle, ce quarré par $-a$, le cube cherché devient $-aaa$. Il n'en est donc pas, à cet égard, des nombres cubiques comme des nombres quarrés, puisque ceux-ci se trouvent toujours positifs. Le cube de -1 est -1, celui de -2 est -8, celui de -3 est -27, & ainsi de suite.

CHAPITRE XV.

Des Racines cubiques & des Nombres irrationnels qui en dérivent.

158.

De même qu'on peut, comme on a vu, trouver le cube d'un nombre donné, on peut réciproquement aussi, étant donné un

nombre quelconque, trouver le nombre qui, multiplié trois fois par lui-même, produit le nombre proposé. Ce nombre cherché s'appelle relativement à l'autre, *la racine cubique*. Ainsi la racine cubique d'un nombre donné est le nombre dont le cube est égal à ce nombre donné.

159.

Il est donc facile de déterminer la racine cubique, quand le nombre proposé est réellement un cube, comme nous en avons vu des exemples dans le chapitre précédent. On sent bien que la racine cubique de 1 est 1; que celle de 8 est 2; que celle de 27 est 3; que celle de 64 est 4; & ainsi de suite. Et pareillement, que la racine cubique de -27 est -3; & que celle de -125 est -5.

De plus, que si le nombre proposé est rompu, comme $\frac{8}{27}$, la racine cubique en doit être $\frac{2}{3}$; & que celle de $\frac{64}{343}$ est $\frac{4}{7}$. Enfin, que la racine cubique d'un nombre mixte

$2\frac{10}{27}$ doit être $\frac{4}{3}$ ou $1\frac{1}{3}$; parce que $2\frac{10}{27}$ eſt autant que $\frac{64}{27}$.

160.

Mais ſi le nombre propoſé n'eſt pas réellement un cube, ſa racine cubique ne pourra pas non plus s'exprimer ni en nombres entiers, ni en nombres fractionnaires. Par exemple, 43 n'eſt pas un nombre cubique; je dis donc qu'il eſt impoſſible d'aſſigner un nombre, ſoit entier ſoit fractionnaire, dont le cube faſſe exactement 43. Ce qu'on peut aſſurer cependant, c'eſt que la racine cubique de ce nombre eſt plus grande que 3, vu que le cube de 3 ne fait que 27, & que cette racine eſt plus petite que 4, parce que le cube de 4 eſt 64. Nous ſavons donc que la racine cubique cherchée eſt néceſſairement contenue entre les nombres 3 & 4.

161.

Si l'on veut donc, puiſque la racine cubique de 43 ſurpaſſe 3, ajouter à 3 une

fraction; il est sûr qu'on pourra de plus en plus approcher de la vraie valeur de cette racine; mais on ne pourra cependant jamais indiquer de nombre qui exprime exactement cette valeur; parce que le cube d'un nombre mixte ne peut jamais être parfaitement égal à un nombre entier, tel qu'est 43. Si l'on supposoit, par exemple, que $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ fût la racine cubique cherchée de 43, on se tromperoit de $\frac{1}{8}$; car le cube de $\frac{7}{2}$ ne fait que $\frac{343}{8}$ ou $42\frac{7}{8}$.

162.

Il est donc clair par-là que la racine cubique de 43 ne peut en aucune maniere s'exprimer soit par des nombres entiers, soit par des fractions. Cependant on a une idée distincte de la grandeur de cette racine; cela engage à se servir, pour l'indiquer, du signe $\sqrt[3]{}$, qu'on met devant le nombre proposé, & qu'on prononce *racine cubique*, afin de la distinguer de la racine quarrée, laquelle on ne fait souvent que

nommer simplement racine. Ainsi $\sqrt[3]{43}$ signifie la racine cubique de 43, c'est-à-dire, le nombre dont le cube est 43, ou qui, multiplié trois fois par lui-même, fait 43.

163.

Il est donc clair aussi que de telles expressions ne peuvent appartenir aux quantités rationnelles, & qu'elles constituent plutôt une espece particuliere de quantités irrationnelles. Elles n'ont même rien de commun avec les racines quarrées, & il n'est pas possible d'exprimer une telle racine cubique par une racine quarrée, comme par exemple par $\sqrt{12}$; car le quarré de $\sqrt{12}$ étant 12, son cube sera $12\sqrt{12}$, par conséquent encore irrationnel & tel qu'il ne peut être égal à 43.

164.

Que si le nombre proposé est un cube réel, nos expressions deviennent rationnelles: $\sqrt[3]{1}$ est autant que 1; $\sqrt[3]{8}$ est autant

que 2; $\sqrt[3]{27}$ autant que 3; & en général $\sqrt[3]{aaa}$ autant que a.

165.

S'il étoit question de multiplier une racine cubique comme $\sqrt[3]{a}$ par une autre comme $\sqrt[3]{b}$, le produit doit être $\sqrt[3]{ab}$; car nous savons que la racine cubique d'un produit ab se trouve en multipliant ensemble les racines cubiques des facteurs. On voit par cela même que s'il s'agissoit de la division de $\sqrt[3]{a}$ par $\sqrt[3]{b}$, le quotient seroit $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

On comprend aussi que $2\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{8a}$, parce que 2 équivaut à $\sqrt[3]{8}$; que $3\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{27a}$; & $b\sqrt[3]{a}$ autant que $\sqrt[3]{abbb}$. Ainsi réciproquement, si le nombre qui suit le signe radical a un facteur qui soit un cube, on peut le faire

nommer simplement racine. Ainsi $\sqrt[3]{43}$ signifie la racine cubique de 43, c'est-à-dire, le nombre dont le cube est 43, ou qui, multiplié trois fois par lui-même, fait 43.

163.

Il est donc clair aussi que de telles expressions ne peuvent appartenir aux quantités rationnelles, & qu'elles constituent plutôt une espece particuliere de quantités irrationnelles. Elles n'ont même rien de commun avec les racines quarrées, & il n'est pas possible d'exprimer une telle racine cubique par une racine quarrée, comme par exemple par $\sqrt{12}$; car le quarré de $\sqrt{12}$ étant 12, son cube sera $12\sqrt{12}$, par conséquent encore irrationnel & tel qu'il ne peut être égal à 43.

164.

Que si le nombre proposé est un cube réel, nos expressions deviennent rationnelles: $\sqrt[3]{1}$ est autant que 1; $\sqrt[3]{8}$ est autant

que 2; $\sqrt[3]{27}$ autant que 3; & en général $\sqrt[3]{aaa}$ autant que a.

165.

S'il étoit question de multiplier une racine cubique comme $\sqrt[3]{a}$ par une autre comme $\sqrt[3]{b}$, le produit doit être $\sqrt[3]{ab}$; car nous savons que la racine cubique d'un produit ab se trouve en multipliant ensemble les racines cubiques des facteurs. On voit par cela même que s'il s'agissoit de la division de $\sqrt[3]{a}$ par $\sqrt[3]{b}$, le quotient seroit $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

On comprend aussi que $2\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{8a}$, parce que 2 équivaut à $\sqrt[3]{8}$; que $3\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{27a}$; & $b\sqrt[3]{a}$ autant que $\sqrt[3]{abbb}$. Ainsi réciproquement, si le nombre qui suit le signe radical a un facteur qui soit un cube, on peut le faire

disparoître en en mettant la racine cubique devant le signe. Par exemple, au lieu de $\sqrt[3]{64a}$ on peut écrire $4\sqrt[3]{a}$; & $5\sqrt[3]{a}$ au lieu de $\sqrt[3]{125a}$. Il suit de là que $\sqrt[3]{16}$ est autant que $2\sqrt[3]{2}$, parce que 16 est autant que 8.2.

167.

Quand un nombre proposé est négatif, sa racine cubique n'est pas sujette aux difficultés que nous avons rencontrées en traitant des racines quarrées. Car puisque les cubes de nombres négatifs sont négatifs, de même il s'ensuit qu'aussi les racines cubiques de nombres négatifs sont simplement négatives. Ainsi $\sqrt[3]{-8}$ signifie -2, & $\sqrt[3]{-27}$, est autant que -3. Il s'ensuit aussi que $\sqrt[3]{-12}$ est la même chose que $-\sqrt[3]{12}$, & que $\sqrt[3]{-a}$ peut s'exprimer par $-\sqrt[3]{a}$. D'où l'on voit que le signe $-$, s'il se trouve derriere le signe de la racine cubique, au-

roit aussi pu se mettre devant ce signe. Nous ne sommes donc pas conduits ici à des nombres impossibles ou imaginaires, comme cela nous est arrivé en considérant les racines quarrées des nombres négatifs.

CHAPITRE XVI.

Des Puissances en général.

168.

Le produit qu'on obtient en multipliant un nombre plusieurs fois par lui-même, se nomme *une puissance*. Ainsi un quarré qui provient de la multiplication d'un nombre par lui-même, & un cube qu'on obtient en multipliant un nombre trois fois par lui-même, sont des puissances. On dit aussi dans le premier cas, que le nombre est élevé au second degré, ou à la seconde puissance; & dans l'autre cas, que le nombre est élevé au troisieme degré ou à la troisieme puissance.

169.

C'est qu'on distingue ces puissances l'une de l'autre par le nombre de fois que le nombre proposé a été multiplié par lui-même. Par exemple, un quarré se nomme la seconde puissance, parce qu'un certain nombre donné a été multiplié deux fois par lui-même; si un nombre a été multiplié trois fois par lui-même, on nomme le produit la troisieme puissance, laquelle signifie donc la même chose qu'un cube. Multipliez un nombre quatre fois par lui-même, vous aurez sa quatrieme puissance, ou bien ce qu'on nomme communément *le quarré-quarré* ou *le bi-quarré*: & il n'est pas difficile à présent de comprendre ce qu'on entend par la cinquieme, sixieme, septieme, &c. puissance d'un nombre. J'ajoute seulement que ces puissances cessent après le quatrieme degré d'avoir d'autres noms particuliers.

170.

Pour éclaircir tout cela encore mieux ; nous remarquerons d'abord que les puissances de 1 restent constamment les mêmes ; parce que, quelque nombre de fois qu'on multiplie ce nombre 1 par lui-même, le produit se trouve toujours être 1. Nous commencerons donc ici par indiquer les puissances de 2 & de 3. Voici l'ordre qu'elles suivent :

Puissances.	*du Nombre 2,*	*du Nombre. 3.*
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Mais ce ſont ſur-tout les puiſſances du nombre 10 qui ſont remarquables ; car ſur ces puiſſances ſe fonde toute notre Arithmétique. En voici quelques-unes rangées par ordre, en commençant par la premiere puiſſance :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,	&c.

171.

Si l'on veut maintenant enviſager la choſe d'une maniere plus générale, on verra que les puiſſances d'un nombre quelconque *a* ſe ſuivent dans cet ordre :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	*aa*,	*aaa*,	*aaaa*,	*aaaaa*,	*aaaaaa*,	*&c.*

Mais on ne tardera pas à s'appercevoir de l'inconvénient qui accompagne cette façon d'écrire les puiſſances, & qui conſiſte en ce qu'il faudroit pour exprimer de grandes puiſſances, écrire la même lettre très-ſouvent ; le Lecteur même n'auroit pas moins de peine, s'il étoit obligé de compter toutes ces lettres pour ſavoir

quelle puiſſance on a voulu indiquer. La centieme puiſſance, par exemple, ne s'écriroit pas commodément de cette façon-là, & il ſeroit encore plus difficile de la reconnoître.

172.

Afin d'éviter cet inconvénient, on a imaginé une façon bien plus commode d'exprimer de telles puiſſances, & qui mérite, à cauſe de ſon uſage étendu, d'être expliquée ſoigneuſement : ſavoir, pour exprimer, par exemple, la centieme puiſſance, on écrit ſimplement le nombre 100 au-deſſus de celui dont on veut exprimer la centieme puiſſance, & un peu vers la droite : ainſi a^{100}, qui ſignifie *a* élevé à 100, indique la centieme puiſſance de *a*. Il ne faut pas oublier qu'on donne le nom d'*expoſant* au nombre écrit au-deſſus de celui dont il indique la puiſſance ou le degré, & qui eſt 100 dans le cas que nous avons ſuppoſé.

173.

De cette maniere a^2 ſignifie donc a élevé à 2, ou la ſeconde puiſſance de a, laquelle cependant on indique auſſi quelquefois par aa, parce que l'une & l'autre expreſſion s'écrit & ſe comprend avec la même facilité. Mais déjà pour exprimer le cube ou la troiſieme puiſſance aaa, on écrit a^3 conformément à la nouvelle regle, afin de gagner de la place. De même a^4 ſignifie la quatrieme, a^5 la cinquieme, a^6 la ſixieme puiſſance de a.

174.

En un mot toutes les puiſſances de a ſe repréſenteront par

a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, &c.

d'où l'on voit que, ſuivant cette maniere, on auroit très-bien pu écrire a^1 au lieu de a pour le premier membre de la ſérie, afin d'en mieux faire appercevoir l'ordre. En effet a^1 n'eſt autre choſe que a, vu que

cette unité indique que la lettre a ne doit s'écrire qu'une fois. Une pareille suite de puissances se nomme aussi une progression géométrique, parce que chaque terme est d'un nombre de fois plus grand que le précédent.

175.

Comme dans cette même suite de puissances chaque terme se trouve en multipliant par a celui qui le précede, ce qui augmente l'exposant de 1; on peut aussi, au moyen d'un terme donné, trouver celui qui le précede, en divisant par a, parce que c'est diminuer l'exposant d'une unité. Cela nous apprend que le terme qui précede le premier terme a^1, doit être nécessairement $\frac{a}{a}$ ou 1; or si l'on se regle sur les exposans, on conclura sans peine que ce terme qui précede le premier, doit être a^0. On peut donc déduire de-là la propriété remarquable, que a^0 est constamment égal à 1, quelque valeur grande ou petite qu'ait

le nombre a, & même quand a n'eſt rien, c'eſt-à-dire que même 0^0 fait 1.

176.

Nous pouvons continuer encore notre ſuite de puiſſances en rétrogradant, & même de deux manieres différentes : l'une en diviſant toujours par a ; l'autre en diminuant l'expoſant d'une unité. Et nous ne pouvons douter que, ſuivant l'une ou l'autre façon, les termes ne ſoient parfaitement égaux. Nous allons préſenter cette ſérie rétrograde ſous l'une & l'autre forme, en avertiſſant que c'eſt auſſi à rebours, c'eſt-à-dire, en allant de la droite vers la gauche, que l'on doit la lire.

	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
I.e	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
II.e	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Nous voici parvenus à connoître des puissances dont les exposans sont négatifs, & à pouvoir assigner exactement les valeurs de ces puissances. Nous mettrons sous les yeux ce que nous avons trouvé, de la façon qui suit : d'abord

a^0 est autant que 1 ; ensuite

a^{-1} ———————— $\frac{1}{a}$;

a^{-2} ———————— $\frac{1}{aa}$ ou $\frac{1}{a^2}$;

a^{-3} ———————— $\frac{1}{a^3}$;

a^{-4} ———————— $\frac{1}{a^4}$;

& ainsi de suite.

178.

Il est clair aussi par ce qui a précédé, comment on doit trouver les puissances d'un produit ab. Elles seront évidemment ab ou $a^1 b^1$, $a^2 b^2$, $a^3 b^3$, $a^4 b^4$, $a^5 b^5$, &c. Et on trouvera de même les puissances des fractions ; par exemple, celles de $\frac{a}{b}$ sont $\frac{a^1}{b^1}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, $\frac{a^6}{b^6}$, $\frac{a^7}{b^7}$, &c.

179.

Enfin nous avons à considérer aussi les puissances des nombres négatifs. Or supposons donné le nombre $-a$; ses puissances se suivront dans l'ordre que voici : $-a$, $+aa$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, &c.

On voit donc qu'il n'y a que les puissances dont les exposans sont des nombres impairs, qui deviennent négatives, & qu'au contraire toutes les puissances qui ont un nombre pair pour exposant, sont positives. En effet, les puissances troisieme, cinquieme, septieme, neuvieme, &c. ont toutes le signe $-$; & les puissances seconde, quatrieme, sixieme, huitieme, &c. sont affectées du signe $+$.

CHAPITRE XVII.

Du calcul des Puissances.

180.

NOUS n'avons rien à observer de particulier par rapport à l'addition & à la soustraction des puissances ; car on ne fait qu'indiquer ces opérations moyennant les signes + & — , quand les puissances sont différentes entr'elles. Par exemple, $a^3 + a^2$ est la somme de la seconde & de la troisieme puissance de a ; & $a^5 - a^4$ est ce qui reste en soustrayant la quatrieme puissance de a de la cinquieme ; & l'on ne peut indiquer plus briévement ni l'un ni l'autre résultat. Que s'il s'agit de puissances de la même espece ou du même degré, il est clair qu'il n'est pas nécessaire de les lier par des signes : $a^3 + a^3$ fait $2a^3$, &c.

181.

Mais la multiplication des puiſſances exige qu'on faſſe attention à différentes choſes.

D'abord quand il s'agit de multiplier par a une puiſſance quelconque de a, on obtient la puiſſance ſuivante, c'eſt-à-dire, celle dont l'expoſant eſt d'une unité plus grand. Ainſi a^2, multiplié par a, fait a^3; & a^3, multiplié par a, fait a^4. Et de même, quand il s'agit de multiplier par a les puiſſances de ce nombre qui ont des expoſans négatifs, on ne fait qu'ajouter 1 à l'expoſant. Ainſi a^{-1} multiplié par a produit a^0 ou 1; ce qui eſt d'autant plus évident, que a^{-1} eſt égal à $\frac{1}{a}$, & que le produit de a par $\frac{1}{a}$ étant $\frac{a}{a}$, il eſt par conſéquent égal à 1. Par des raiſons ſemblables a^{-2}, multiplié par a, fait a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; & a^{-10}, multiplié par a, donne a^{-9}, & ainſi de ſuite.

182.

Enſuite, s'il eſt queſtion de multiplier une puiſſance de a par aa ou par la deuxieme puiſſance, je dis que l'expoſant devient plus grand de 2. Ainſi le produit de a^2 par a^2 eſt a^4; celui de a^2 par a^3 eſt a^5; celui de a^4 par a^2 eſt a^6; & plus généralement encore, a^n multiplié par a^2 fait a^{n+2}. Pour ce qui eſt des expoſans négatifs, on aura a^1 ou a pour le produit de a^{-1} par a^2; car a^{-1} étant égal à $\frac{1}{a}$, c'eſt comme ſi l'on avoit à diviſer aa par a; par conſéquent le produit cherché eſt $\frac{aa}{a}$ ou a. De même a^{-2}, multiplié par a^2, fait a^0 ou 1; & a^{-3}, multiplié par a^2, fait a^{-1}.

183.

Il n'eſt pas moins évident que, pour multiplier une puiſſance quelconque de a par a^3, il faut en augmenter l'expoſant de trois unités; & que par conſéquent le produit de a^n par a^3 eſt a^{n+3}. Et toutes les fois

donc qu'il s'agit de multiplier enſemble deux puiſſances de a, on voit que le produit ſera de même une puiſſance de a, & tel que ſon expoſant ſera la ſomme de ceux des deux puiſſances données. Par exemple, a^4 multiplié par a^5 ſera a^9, & a^{12} multiplié par a^7 ſera a^{19}, &c.

184.

En partant de là on peut déterminer aſſez facilement des puiſſances très-élevées. Pour trouver, par exemple, la vingt-quatrieme puiſſance de 2, je multiplie la douzieme puiſſance par la douzieme puiſſance, parce que 2^{24} eſt autant que 2^{12} multiplié par 2^{12}. Or nous avons vu plus haut que 2^{12} fait 4096; je dis donc que c'eſt le nombre 16777216, ou le produit de 4096 par 4096, qui exprime la puiſſance cherchée 2^{24}.

185.

Paſſons à la diviſion. Nous remarquerons en premier lieu, que pour diviſer une

puissance de a par a, il faut soustraire 1 de l'exposant, ou le diminuer de l'unité. Ainsi a^5, divisé par a, fait a^4; a^0 ou 1, divisé par a, est autant que a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; a^{-3}, divisé par a, fait a^{-4}.

186.

Si c'est par a^2 qu'il faut diviser une puissance donnée de a, il faudra diminuer l'exposant de 2; & si c'est par a^3, il faut soustraire trois unités de l'exposant de la puissance proposée. Ainsi en général, quelque puissance de a que ce soit qu'il s'agisse de diviser par une autre puissance quelconque de a, la regle est toujours de soustraire l'exposant de la seconde de l'exposant de la premiere de ces puissances. C'est ainsi que a^{15}, divisé par a^7, donnera a^8; que a^6, divisé par a^7, donnera a^{-1}; & que a^{-3}, divisé par a^4, donnera a^{-7}.

187.

Par ce que nous avons dit plus haut, il est facile de comprendre comment on

doit trouver les puissances des puissances ; & que cela se fait par la multiplication. Quand on cherche, par exemple, le quarré ou la seconde puissance de a^3, on trouve a^6 ; & de la même maniere on trouve a^{12} pour la troisieme puissance, ou le cube de a^4 ; on voit que pour prendre le quarré d'une puissance, il n'y a qu'à doubler son exposant ; que pour en prendre le cube, il faut tripler cet exposant, & ainsi de suite. Le quarré de a^n est a^{2n} ; le cube de a^n est a^{3n} ; la septieme puissance de a^n est a^{7n}, &c.

188.

Le quarré de a^2, ou le quarré du quarré de a étant a^4, on voit pourquoi on nomme la quatrieme puissance, le *bi-quarré* ou le *quarré-quarré.*

Le quarré de a^3 est a^6, c'est ce qui a fait donner à la sixieme puissance le nom de *quarré-cube.*

Enfin le cube de a^3 étant a^9, on appelle les neuviemes puissances *cubes-cubes.* On

n'a pas introduit d'autres dénominations de cette espece pour les puissances, & même les deux dernieres ne sont pas fort en usage.

CHAPITRE XVIII.

Des Racines relativement à toutes les Puissances en général.

189.

PUISQUE la racine quarrée d'un nombre donné est un nombre tel que son quarré est égal à ce nombre donné, & que la racine cubique d'un nombre donné est un nombre tel que son cube est égal à ce nombre donné; il s'ensuit qu'étant donné un nombre quelconque, on peut toujours en indiquer des racines telles que leur quatrieme ou leur cinquieme puissance, ou quelque autre à volonté, soit égale au nombre donné. Afin de distinguer mieux ces différentes especes de racines, nous

nommerons la racine quarrée, *racine deuxieme ;* la racine cubique, *racine troisieme ;* parce que d'après cette dénomination, on peut nommer *racine quatrieme*, celle dont le quarré-quarré est égal à un nombre donné ; & *racine cinquieme*, celle dont la cinquieme puissance est égale à un nombre donné, &c.

190.

De même que la racine quarrée ou deuxieme s'indique par le signe $\sqrt{}$, & la racine cubique ou troisieme, par le signe $\sqrt[3]{}$, on représente la racine quatrieme par le signe $\sqrt[4]{}$; la racine cinquieme par le signe $\sqrt[5]{}$, & ainsi de suite. Il est clair que suivant cette façon de s'exprimer, le signe de la racine quarrée devroit être $\sqrt[2]{}$. Mais comme de toutes les racines c'est celle-ci qui se présente le plus souvent, on est convenu, pour abréger, d'omettre le nombre 2 du signe de cette racine. Ainsi, quand dans un signe

radical il ne se trouve pas de nombre, cela suppose toujours que c'est la racine quarrée qu'on a voulu indiquer.

191.

Nous allons, pour nous expliquer encore mieux, mettre sous les yeux les différentes racines du nombre a, avec leurs significations.

$\sqrt{a}$ est la IIe racine de a,

$\sqrt[3]{a}$ —— IIIe ———— a,

$\sqrt[4]{a}$ —— IVe ———— a,

$\sqrt[5]{a}$ —— V.^{e} ———— a,

$\sqrt[6]{a}$ —— VIe ———— a,

& ainsi de suite.

De sorte que réciproquement :

la IIe puissance de $\sqrt{a}$ est égale à a;

la IIIe ———— $\sqrt[3]{a}$ ———— a,

la IVe ———— $\sqrt[4]{a}$ ———— a,

la Ve ———— $\sqrt[5]{a}$ ———— a,

la VIe ———— $\sqrt[6]{a}$ ———— a,

& ainsi de suite.

192.

Que le nombre a ſoit donc grand ou petit, on comprend quel ſens on doit attacher à toutes ces racines de différens degrés.

Il faut remarquer auſſi, que ſi l'on prend pour a l'unité, toutes ces racines reſtent conſtamment 1 ; parce que toutes les puiſſances de 1 ont pour valeur l'unité. Que ſi le nombre a eſt plus grand que 1, toutes ſes racines auſſi ſurpaſſeront l'unité. Enfin, que ſi ce nombre eſt plus petit que 1, toutes ſes racines auſſi ſeront moindres que l'unité.

193.

Quand le nombre a eſt poſitif, on comprend, par ce qui a été dit plus haut des racines quarrées & cubiques, que toutes les autres racines auſſi pourront être indiquées réellement, & ſeront des nombres réels & poſſibles.

Mais ſi le nombre *a* eſt négatif, il faut que ſes racines, deuxieme, quatrieme, ſixieme, & en général toutes celles d'un degré pair, deviennent des nombres impoſſibles ou imaginaires; parce que toutes les puiſſances d'un degré pair, tant des nombres poſitifs que des nombres négatifs, ſont toujours affectées du ſigne *plus*. Au lieu que les racines troiſieme, cinquieme, ſeptieme, & en général toutes les racines *impaires*, deviennent négatives, mais rationnelles; parce que les puiſſances impaires de nombres négatifs, ſont négatives de même.

194.

Enfin nous avons là auſſi une ſource inépuiſable de nouvelles eſpeces de quantités ſourdes ou irrationnelles; car toutes les fois que le nombre *a* n'eſt pas réellement une puiſſance telle que le ſigne radical en indique une, ou ſemble en requérir une, il eſt impoſſible auſſi d'exprimer cette racine,

ſoit en nombres entiers, ſoit par des fractions, & par conſéquent cette racine doit alors être rangée dans la claſſe des nombres qu'on nomme irrationnels.

CHAPITRE XIX.

De la maniere d'indiquer les Nombres irrationnels par des expoſans fractionnaires.

195.

NOUS venons de faire voir dans le chapitre précédent, que le quarré d'une puiſſance quelconque ſe trouve en doublant l'expoſant de cette puiſſance, & qu'en général le quarré ou la ſeconde puiſſance de a^n eſt a^{2n}. Il s'enſuit de là l'inverſe, ſavoir, que la racine quarrée de la puiſſance a^{2n} eſt a^n, & qu'on la trouve en prenant la moitié de l'expoſant de cette puiſſance, ou en diviſant cet expoſant par 2.

196.

Ainsi la racine quarrée de a^2 est a^1; celle de a^4 est a^2; celle de a^6 est a^3; & ainsi de suite. Et comme c'est là une vérité générale, on voit que la racine quarrée de a^3 doit nécessairement être $a^{\frac{3}{2}}$, & que celle de a^1 est $a^{\frac{1}{2}}$. Par conséquent on aura de même $a^{\frac{1}{2}}$ pour la racine quarrée de a^1; d'où l'on voit que $a^{\frac{1}{2}}$ est autant que $\sqrt{a}$; & cette nouvelle maniere d'indiquer la racine quarrée, demande qu'on y fasse attention.

197.

Nous avons montré aussi que pour trouver le cube d'une puissance comme a^n, il falloit multiplier son exposant par 3, & que par conséquent ce cube étoit a^{3n}.

Ainsi, quand il s'agit de trouver en rétrogradant la racine troisieme, ou cubique, de la puissance a^{3n}, on ne fait que diviser cet exposant par 3, & on conclut que

la racine cherchée est a^n. Par conséquent a^1, ou a, est la racine cubique de a^3; a^2 est celle de a^6; a^3 est celle de a^9, & ainsi de suite.

198.

Rien n'empêche d'appliquer ces principes aux cas où l'exposant ne seroit pas divisible par 3, & de conclure que la racine cubique de a^2 est $a^{\frac{2}{3}}$, & que celle de a^4 est $a^{\frac{4}{3}}$ ou $a^{1\frac{1}{3}}$. Par conséquent aussi la racine troisieme, ou cubique, de a même, ou bien de a^1, doit être $a^{\frac{1}{3}}$. D'où l'on voit que $a^{\frac{1}{3}}$ est la même chose que $\sqrt[3]{a}$.

199.

Il en est de même des racines d'un degré plus élevé. La racine quatrieme de a sera $a^{\frac{1}{4}}$, laquelle expression signifie donc autant que $\sqrt[4]{a}$. La racine cinquieme de a sera $a^{\frac{1}{5}}$, ce qui est par conséquent l'équivalent de $\sqrt[5]{a}$; & ces vérités s'étendent sans difficulté à toutes les racines d'un degré plus élevé.

200.

200.

On pourroit donc se passer entiérement des signes radicaux usités, & employer à leur place les exposans fractionnaires que nous venons d'expliquer ; cependant comme on est accoutumé à ces signes depuis long-temps, & qu'on les rencontre dans tous les écrits analytiques, on auroit tort de vouloir les bannir tout-à-fait du calcul. Mais on a raison aussi de se servir beaucoup, comme l'on fait aujourd'hui, de l'autre maniere, parce qu'elle répond avec évidence à la nature de la chose. En effet, on voit sur le champ que $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine quarrée de a, parce qu'on sait que le quarré de $a^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, $a^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $a^{\frac{1}{2}}$, est égal à a^1 ou a.

201.

On voit par ce qui a précédé, comment on doit interpréter tous les autres exposans rompus qui peuvent se présenter. Que si

l'on a, par exemple, $a^{\frac{4}{3}}$, cela signifie qu'il faut prendre d'abord la quatrieme puissance de a, & en extraire ensuite la racine cubique ou troisieme ; de sorte que $a^{\frac{4}{3}}$ est autant que, suivant la façon ordinaire, $\sqrt[3]{a^4}$. Que pour trouver la valeur de $a^{\frac{3}{4}}$, il faut prendre d'abord le cube ou la troisieme puissance de a, qui est a^3, & en extraire après cela la racine quatrieme ; de façon que $a^{\frac{3}{4}}$ est la même chose que $\sqrt[4]{a^3}$. De même $a^{\frac{4}{5}}$ est autant que $\sqrt[5]{a^4}$, &c.

202.

Quand la fraction qui représente l'exposant surpasse l'unité, on peut indiquer encore d'une autre maniere la valeur de la quantité proposée. Supposez que ce soit $a^{\frac{5}{2}}$; cette quantité équivaut à $a^{2\frac{1}{2}}$, qui est le produit de a^2 par $a^{\frac{1}{2}}$. Or $a^{\frac{1}{2}}$ étant égal à $\sqrt{a}$, on voit que $a^{\frac{5}{2}}$ est autant que $a^2\sqrt{a}$. De même $a^{\frac{10}{3}}$ ou $a^{3\frac{1}{3}}$ est autant que $a^3\sqrt[3]{a}$; & $a^{\frac{15}{4}}$, c'est-à-dire $a^{3\frac{3}{4}}$, signifie

$a^3\sqrt[4]{a^3}$. Ces exemples suffisent pour faire concevoir la grande utilité des exposans fractionnaires.

203.

Leur usage s'étend aussi aux nombres rompus : Qu'on ait $\frac{1}{\sqrt{a}}$, on sait que cette quantité est égale à $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; or nous avons vu plus haut qu'une fraction de la forme $\frac{1}{a^n}$ peut s'exprimer par a^{-n}; ainsi pour $\frac{1}{\sqrt{a}}$ on peut se servir de l'expression $a^{-\frac{1}{2}}$. De même $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ est autant que $a^{-\frac{1}{3}}$. Soit proposée encore la quantité $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$; qu'on la transforme en celle-ci : $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, qui est le produit de a^2 par $a^{-\frac{3}{4}}$; or ce produit équivaut à $a^{\frac{5}{4}}$ ou à $a^{1\frac{1}{4}}$, ou enfin à $a\sqrt[4]{a}$. L'usage rendra faciles de semblables réductions.

204.

Enfin nous obſerverons que chaque racine peut ſe repréſenter d'un grand nombre de manieres. Car $\sqrt{a}$ étant la même choſe que $a^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{2}$ pouvant être transformé en toutes ces fractions, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, &c. il eſt clair que $\sqrt{a}$ eſt autant que $\sqrt[4]{a^2}$, & que $\sqrt[6]{a^3}$, & que $\sqrt[8]{a^4}$, & ainſi de ſuite. Pareillement, $\sqrt[3]{a}$ qui ſignifie $a^{\frac{1}{3}}$, ſera égale à $\sqrt[6]{a^2}$ & à $\sqrt[9]{a^3}$, & à $\sqrt[12]{a^4}$. Et l'on voit de même que le nombre a, ou a^1, pourroit s'indiquer par les expreſſions radicales qui ſuivent:

$$\sqrt[2]{a^2},\ \sqrt[3]{a^3},\ \sqrt[4]{a^4},\ \sqrt[5]{a^5},\ \&c.$$

205.

Cette propriété eſt d'un bon uſage dans la multiplication & dans la diviſion. Car ſi l'on a, par exemple, à multiplier $\sqrt[2]{a}$ par $\sqrt[3]{a}$, on écrit $\sqrt[6]{a^3}$ pour $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[6]{a^2}$

au lieu de $\sqrt[3]{a}$; de cette façon on obtient de part & d'autre le même signe radical, & la multiplication se faisant maintenant, donne le produit $\sqrt[6]{a^5}$. Le même résultat se déduit de ce que $a^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $a^{\frac{1}{3}}$ fait $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$; car $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ est $\frac{5}{6}$, & par conséquent le produit en question est en effet $a^{\frac{5}{6}}$ ou $\sqrt[6]{a^5}$.

S'il s'agissoit de diviser $\sqrt[2]{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{\frac{1}{3}}$, on auroit pour quotient $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, ou $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, c'est-à-dire a ou $\sqrt[6]{a}$.

CHAPITRE XX.

Qui traite en général des différentes manieres de calculer & de leur liaison.

206.

Nous avons exposé jusqu'ici différentes opérations de calcul : l'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division;

l'élévation des Puiſſances, & enfin l'extraction des Racines. Il ne ſera donc pas hors de propos de remonter à l'origine de ces différentes manieres de calculer & d'expliquer la liaiſon qui eſt entr'elles, afin qu'on puiſſe s'aſſurer s'il eſt poſſible ou non qu'il exiſte encore d'autres opérations de cette eſpece. Cette recherche ne pourra que répandre plus de jour ſur les matieres que nous avons traitées.

Nous nous ſervirons dans ce deſſein d'un nouveau ſigne qu'on peut employer à la place de l'expreſſion ſi ſouvent répétée, *eſt autant que*; ce ſigne eſt celui-ci $=$, & ſe prononce *eſt égal*. Ainſi quand j'écris $a=b$, cela ſignifie que a eſt autant que b, ou que a eſt égal à b; de même, par exemple, $3.5=15$.

207.

La premiere façon de calculer qui ſe préſente à notre eſprit, eſt ſans contredit l'addition, par laquelle on ajoute deux nombres enſemble, & qu'on trouve leur

somme. Soient donc a & b ces deux nombres proposés, & qu'on indique leur somme par la lettre c, on aura $a+b=c$. Ainsi quand on connoît les deux nombres a & b, l'addition enseigne à trouver moyennant cela le nombre c.

208.

Conservons cette comparaison $a+b=c$, mais renversons la question en demandant, comment, les nombres a & c étant connus, on doit trouver le nombre b.

Il s'agit donc de savoir quel nombre il faut ajouter au nombre a, pour qu'il en résulte ce nombre c. Soit, par exemple, $a=3$ & $c=8$; de sorte qu'il faudroit que l'on eût $3+b=8$; il est clair qu'on trouvera b en soustrayant 3 de 8. Ainsi en général, pour trouver b, il faudra soustraire a de c, d'où provient $b=c-a$; car en ajoutant de nouveau a de part & d'autre, on a $b+a=c-a+a$, c'est-à-dire $=c$, comme on l'avoit supposé.

Et voilà donc l'origine de la soustraction.

209.

Ainsi la soustraction a lieu, quand on renverse la question qui donne lieu à l'addition. Or il peut arriver que le nombre qu'il s'agit de soustraire soit plus grand que celui duquel il faut le soustraire ; comme, par exemple, s'il s'agissoit de soustraire 9 de 5 ; ce cas est donc propre à nous fournir l'idée d'une nouvelle espece de nombres, qu'on nomme nombres négatifs, parce que $5-9=-4$.

210.

Quand plusieurs nombres qui doivent être ajoutés ensemble sont égaux entr'eux, leur somme se trouve par la multiplication, & se nomme un produit. Ainsi ab signifie le produit qui provient de la multiplication de a par b, ou bien de ce qu'on a ajouté ensemble un nombre a de nombres b. Si nous indiquons à présent ce produit par la lettre c, nous aurons $ab=c$; & la multiplication nous apprend comment, les

nombres a & b étant connus, l'on doit déterminer par-là le nombre c.

211.

Proposons-nous maintenant la question suivante : Les nombres a & c étant connus, trouver le nombre b. Soit, par exemple, $a = 3$ & $c = 15$, de façon que $3b = 15$, & qu'on demande par quel nombre il faut multiplier 3, pour qu'il nous vienne 15; c'est à quoi revient la question proposée. Or c'est ici le cas de la division; le nombre qu'on demande se trouve en divisant 15 par 3, & en général le nombre b se trouve donc en divisant c par a; d'où il résulte par conséquent l'équation $b = \frac{c}{a}$.

212.

Or, comme il arrive souvent que le nombre c ne peut être divisé réellement par le nombre a, & que cependant la lettre b doit avoir une valeur déterminée, il se présente encore une nouvelle espece

de nombres ; ce sont les fractions. Par exemple, en supposant $a=4$, $c=3$, de façon que $4b=3$, on voit bien que b ne sauroit être un nombre entier, mais que ce sera une fraction, & qu'on aura $b=\frac{3}{4}$.

213.

Nous avons vu que la multiplication provient de l'addition, c'est-à-dire, de ce qu'on ajoute ensemble plusieurs quantités égales. Si nous allons à présent plus loin, nous voyons que c'est à la multiplication de plusieurs quantités égales entr'elles que les puissances doivent leur origine. Ces puissances se représentent d'une maniere générale par la formule a^b; par laquelle on entend que le nombre a doit être multiplié autant de fois par lui-même que le nombre b l'indique. Et l'on sait, par ce qui a précédé, qu'ici a est ce qu'on nomme la racine, b l'exposant, & a^b la puissance.

214.

Si nous indiquons maintenant cette puiſſance même par la lettre c, nous avons $a^b = c$, une équation par conſéquent dans laquelle ſe préſentent trois lettres a, b, c. Or on montre dans la théorie des puiſſances, comment une racine a avec l'expoſant b étant donnés, on doit trouver la puiſſance elle-même, c'eſt-à-dire, la lettre c. Soit, par exemple, $a = 5$, & $b = 3$, en ſorte que $c = 5^3$: on voit qu'il faut prendre la troiſieme puiſſance de 5, qui eſt 125, & qu'ainſi $c = 125$.

215.

On a vu comment, par le moyen de la racine a & de l'expoſant b, on doit déterminer la puiſſance c; mais ſi l'on veut à préſent changer ou renverſer la queſtion, comme on a déjà fait, on verra que cela peut ſe faire de deux manieres, & qu'on a deux cas différens à conſidérer. En effet

si, deux de ces trois nombres a, b, c étant donnés, il s'agit de trouver le troisieme, on voit aussi-tôt que cette question admet trois suppositions différentes, & par conséquent trois solutions. Nous venons de considérer le cas où a & b étoient les données, nous pouvons donc supposer encore que c & a, ou bien que c & b soient connus, & qu'il faille déterminer la troisieme lettre. Remarquons donc, avant que d'aller plus loin, une différence assez essentielle entre l'élévation des puissances & les deux opérations qui conduisent à celle-là. Lorsque dans l'addition nous avons renversé la question, nous n'avons pu le faire que d'une seule maniere; il étoit indifférent de prendre c & a ou c & b pour données, parce qu'il est indifférent d'écrire $a+b$ ou d'écrire $b+a$. Il en étoit de même de la multiplication; on pouvoit pareillement prendre les lettres a & b l'une pour l'autre, l'équation $ab=c$ étant exactement la même que $ba=c$.

Dans le calcul des puissances, au contraire la même chose n'a pas lieu, & on ne peut point du tout écrire b^a au lieu de a^b. Un seul exemple suffit pour s'en convaincre : Soit $a=5$, & $b=3$; on a $a^b=5^3=125$. Mais $b^a=3^5=243$: deux résultats très-différens.

216.

Il est donc clair qu'on peut réellement se proposer encore deux questions : l'une, de trouver la racine a par le moyen de la puissance donnée c, & de l'exposant b. L'autre, de trouver l'exposant b, en supposant connues la puissance c & la racine a.

217.

On peut dire que la premiere de ces questions a été résolue dans le chapitre de l'extraction des racines. Car, par exemple, si $b=2$ & que $a^2=c$, nous savons que cela signifie que a est un nombre tel que son quarré soit égal à c, & par conséquent

que $a=\sqrt[2]{c}$. De même, si $b=3$ & $a^3=c$, on sait qu'il faut que le cube de a soit égal au nombre donné c, & conséquemment que $a=\sqrt[3]{c}$. Il est donc aisé de conclure généralement de là comment on doit déterminer la lettre a par le moyen des lettres c & b: il faut nécessairement que $a=\sqrt[b]{c}$.

218.

Nous avons aussi déjà fait remarquer la conséquence qui s'ensuit du cas très-fréquent où le nombre donné c n'est pas réellement une puissance; savoir, qu'alors la racine cherchée a ne peut s'exprimer ni par des nombres entiers, ni par des fractions. Et comme cette racine doit avoir cependant nécessairement une valeur déterminée, la même remarque nous a conduits à une nouvelle espece de nombres que nous avons dit qu'on nommoit nombres *sourds* ou *irrationnels*, & que nous avons vus se diviser en une infinité d'especes à cause de la

grande diverſité des racines. Enfin la même conſidération nous a appris à connoître l'eſpece particuliere de nombres, qu'on a nommée *nombres imaginaires*.

219.

Il nous reſte à conſidérer la ſeconde queſtion, qui étoit de déterminer l'expoſant par le moyen de la puiſſance *c* & de la racine *a*, toutes deux connues. Cette queſtion, qui ne s'étoit pas encore préſentée, nous conduira à l'importante théorie des Logarithmes, dont l'uſage eſt ſi étendu dans toutes les Mathématiques, qu'il y a peu de long calcul dont on puiſſe venir à bout ſans ſon ſecours. On verra dans le chapitre ſuivant, pour lequel nous réſervons cette théorie, qu'elle nous fait parvenir à une eſpece de nombres encore tout-à-fait nouvelle, & qu'on ne peut pas même compter parmi les nombres irrationnels dont nous avons parlé.

CHAPITRE XXI.

Des Logarithmes en général.

220.

En reprenant l'équation $a^b = c$, nous commencerons par remarquer que dans la doctrine des logarithmes on adopte pour la racine a un certain nombre pris à volonté, & qu'on suppose que cette racine conserve invariablement la valeur adoptée. Cela posé, on prend l'exposant b tel, que la puissance a^b devienne égale à un nombre donné c, & c'est alors cet exposant b qu'on dit être le *logarithme* du nombre c. Nous nous servirons, pour exprimer cette signification, de la lettre L. ou des lettres initiales *log*. Ainsi en écrivant $b = L.c$, ou $b = log.c$, on indique que b est égale au logarithme du nombre c, ou bien que le logarithme de c est b.

221.

On voit donc que la valeur de la racine a une fois établie, le logarithme d'un nombre quelçonque c n'eſt autre choſe que l'expoſant de la puiſſance de a, qui eſt égale à c. C'eſt ainſi que c étant $=a^b$, b eſt le logarithme de la puiſſance a^b. Si l'on ſuppoſe à préſent que $b=1$, on a 1 pour le logarithme de a^1, & par conſéquent $L.a=1$. Si l'on ſuppoſe $b=2$, on a 2 pour le logarithme de a^2; c'eſt-à-dire, $L.a^2=2$. On peut obtenir de la même maniere, $L.a^3=3$; $L.a^4=4$; $L.a^5=5$, & ainſi de ſuite.

222.

Si l'on fait $b=0$, on voit que 0 ſera le logarithme de a^0: or $a^0=1$; par conſéquent $L.1=0$, quelque valeur qu'on donne à la racine a.

Que ſi l'on ſuppoſe $b=-1$, ce ſera -1 qui ſera le logarithme de a^{-1}. Or

$a^{-1} = \frac{1}{a}$; on a donc L. $\frac{1}{a} = -1$. On aura pareillement L. $\frac{1}{a^2} = -2$; L. $\frac{1}{a^3} = -3$; L. $\frac{1}{a^4} = -4$, &c.

223.

Il eſt donc évident comment on peut indiquer les logarithmes de toutes les puiſſances de la racine a, & même ceux de fractions qui ont pour numérateur l'unité, & pour dénominateur une puiſſance de a. On voit auſſi que dans tous ces cas les logarithmes ſont des nombres entiers ; mais il faut obſerver que ſi b étoit une fraction, elle feroit le logarithme d'un nombre irrationnel. Car ſi l'on ſuppoſe, par exemple, $b = \frac{1}{2}$, il ſuit que $\frac{1}{2}$ eſt le logarithme de $a^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{a}$; par conſéquent on a L. $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$. On trouvera de même L. $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$; L. $\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, &c.

224.

Mais s'il s'agit de trouver le logarithme d'un autre nombre c, on voit aisément qu'il ne peut être ni un nombre entier, ni une fraction. Cependant il faut qu'il existe un exposant b, tel que la puissance a^b devienne égale au nombre proposé : on a donc $b = L.c$. Donc généralement $a^{L.c} = c$.

225.

Considérons à présent un autre nombre d, dont le logarithme ait été indiqué d'une maniere semblable par $L.d$; de façon que $a^{L.d} = d$. Si nous multiplions cette formule par la précédente $a^{L.c} = c$, nous aurons $a^{L.c + L.d} = cd$; or l'exposant est toujours le logarithme de la puissance; par conséquent $L.c + L.d = L.cd$.

Que si au lieu de multiplier nous divisions la premiere formule par la seconde, nous obtiendrions $a^{L.c - L.d} = \frac{c}{d}$; & par conséquent $L.c - L.d = L.\frac{c}{d}$.

226.

C'eſt ainſi que nous avons été conduits à la découverte des deux principales propriétés des logarithmes, qui conſiſtent dans les équations $L.c + L.d = L.cd$, & $L.c - L.d = L.\frac{c}{d}$. La premieré de ces équations nous apprend que le logarithme d'un produit, comme cd, ſe trouve en ajoutant enſemble les logarithmes des facteurs. La ſeconde nous indique la propriété, que le logarithme d'une fraction peut ſe déterminer en ſouſtrayant le logarithme du dénominateur de celui du numérateur.

227.

Il s'enſuit donc de là, que quand il s'agit de multiplier ou de diviſer deux nombres l'un par l'autre, on n'a beſoin que d'ajouter ou de ſouſtraire leurs logarithmes. Et c'eſt là préciſément en quoi conſiſte l'utilité inſigne des logarithmes dans le calcul.

Car qui ne voit qu'il est incomparablement plus aisé d'ajouter ou de soustraire des nombres, que d'en multiplier ou d'en diviser, sur-tout quand la question roule sur de grands nombres.

228.

Les logarithmes offrent des avantages encore plus grands, dans le calcul des puissances & dans l'extraction des racines. Car si $d=c$, on a par la premiere propriété $L.c+Lc=L.cc$; par conséquent $L.cc=2\,L.c.$ On obtient pareillement $L.c^3=3\,L.c$; $L.c^4=4\,L.c$; & en général $L.c^n=n\,L.c.$

Si l'on substitue maintenant à n des nombres rompus, on aura, par exemple, $L.c^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, $L.\sqrt{c}=\frac{1}{2}\,L.c.$

Enfin, si l'on suppose que n représente des nombres négatifs, on aura $L.c^{-1}$ ou $L.\frac{1}{c}=-L.c$; $L.c^{-2}$ ou $L.\frac{1}{cc}=-2\,L.c$, & ainsi de suite. Cela suit non-seulement de l'équation $L.c^n=n\,L.c$, mais aussi de

ce que, comme nous l'avons vu plus haut, $L.1 = 0$.

229.

Si l'on a donc des tables dans lesquelles les logarithmes se trouvent calculés pour tous les nombres, on a, comme l'on voit, un puissant secours pour venir facilement à bout de calculs très-prolixes, qui exigeroient beaucoup de multiplications, de divisions, d'élévations de puissances & d'extractions de racines. Car on trouveroit dans ces tables non-seulement les logarithmes pour tous les nombres, mais aussi les nombres pour les logarithmes. Par exemple, s'il est question de chercher la racine quarrée du nombre c, on cherche d'abord le logarithme de c, qui est $L.c$, & prenant ensuite la moitié de ce logarithme, ou $\frac{1}{2}L.c$, on sait qu'on a le logarithme de la racine quarrée qu'on cherche. On n'a donc qu'à voir dans les tables quel nombre répond à ce logarithme, on est assuré qu'il exprime la racine cherchée.

230.

Nous avons vu plus haut que les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. c'eſt-à-dire tous les nombres poſitifs, ſont des logarithmes de la racine *a* & de ſes puiſſances poſitives, & par conſéquent des logarithmes de nombres plus grands que l'unité. Et au contraire que les nombres négatifs, comme — 1, — 2, &c. ſont les logarithmes des fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ &c. qui ſont plus petites que l'unité, mais cependant encore plus grandes que rien.

Il ſuit de là que ſi le logarithme eſt poſitif, le nombre eſt toujours plus grand que l'unité; mais que ſi le logarithme eſt négatif, le nombre eſt toujours plus petit que 1, & pourtant plus grand que zéro. Par conſéquent on ne ſauroit indiquer des logarithmes de nombres négatifs, & il faut en conclure que les logarithmes des nombres négatifs ſont impoſſibles, & qu'ils appartiennent à la claſſe des quantités imaginaires.

231.

Il ſera bon, afin d'éclaircir tout cela encore mieux, d'adopter un nombre déterminé pour la racine a, & nous choiſirons celui-là même ſur lequel on a fondé les tables logarithmiques ordinaires. C'eſt le nombre 10; on lui a donné la préférence, parce qu'il ſert déjà de baſe à toute notre Arithmétique. Mais on voit facilement que tout autre nombre, pourvu qu'il fût plus grand que l'unité, pourroit ſervir au même uſage. Quant à la raiſon pourquoi on ne pourroit pas ſuppoſer $a = 1$, elle eſt claire; toutes les puiſſances a^b ſeroient conſtamment égales à l'unité, & ne pourroient jamais devenir égales à un autre nombre donné c.

CHAPITRE XXII.

Des Tables de Logarithmes usitées.

232.

DANS ces tables on part de la supposition, comme nous venons de le dire, que la racine $a=10$. Ainsi le logarithme d'un nombre quelconque c est l'exposant auquel il faut élever le nombre 10, pour qu'il en résulte une puissance égale au nombre c. Ou bien, si l'on désigne le logarithme de c par L. c, on aura toujours $10^{L.c}=c$.

233.

Nous avons déjà fait remarquer que le logarithme du nombre 1 est toujours 0; & en effet on a $10^0=1$; par conséquent: $L.1=0$; $L.10=1$; $L.100=2$; $L.1000=3$; $L.10000=4$; $L.100000=5$; $L.1000000=6$. De plus

$L.\frac{1}{10}=-1$; $L.\frac{1}{100}=-2$; $L.\frac{1}{1000}=-3$;
$L.\frac{1}{10000}=-4$; $L.\frac{1}{100000}=-5$;
$L.\frac{1}{1000000}=-6$.

234.

Ces logarithmes des nombres principaux ſe déterminent, comme on voit, ſans aucune peine. Mais il eſt d'autant plus difficile de trouver les logarithmes de tous les autres nombres, & cependant il eſt néceſſaire qu'on les inſere dans les tables. Ce n'eſt pas ici encore le lieu de donner toutes les inſtructions requiſes pour cette recherche, nous nous contenterons pour le préſent de voir en général ce qu'elle exige.

235.

D'abord, puiſque L. 1 = 0 & L. 10 = 1, il eſt évident que les logarithmes de tous les nombres entre 1 & 10 doivent être compris entre 0 & 1, & être par conſéquent plus grands que 0 & plus petits que 1.

Nous n'avons qu'à conſidérer le ſeul nombre 2; il eſt certain que ſon logarithme eſt plus grand que 0, & cependant plus petit que l'unité; & ſi nous déſignons ce loga-

rithme par la lettre x, en forte que $L.2 = x$, il faut que la valeur de cette lettre soit telle qu'on ait exactement $10^x = 2$.

Il eſt facile auſſi de ſe convaincre que x doit être beaucoup plus petit que $\frac{1}{2}$ ou ce qui revient au même, que $10^{\frac{1}{2}}$ eſt plus grand que 2. Car ſi nous prenons de part & d'autre les quarrés, on trouve le quarré de $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$ & celui de $2 = 4$; or ce dernier eſt de beaucoup moindre que le premier. De même $\frac{1}{3}$ eſt encore une valeur trop grande pour x, c'eſt-à-dire que $10^{\frac{1}{3}}$ eſt plus grand que 2. Car le cube de $10^{\frac{1}{3}}$ eſt 10, & celui de 2 ne fait que 8. Mais au contraire en ne faiſant x que de $\frac{1}{4}$ on lui donneroit une valeur trop petite, parce que la quatrieme puiſſance de $10^{\frac{1}{4}}$ étant 10 & celle de 2 étant 16, il eſt clair que $10^{\frac{1}{4}}$ eſt moindre que 2.

On voit que x ou le L. 2 eſt plus petit que $\frac{1}{3}$, & cependant plus grand que $\frac{1}{4}$. On peut déterminer de la même maniere à

l'égard de toute fraction contenue entre $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$, si elle est trop grande ou si elle est trop petite. En tentant, par exemple, avec $\frac{2}{7}$, qui est une fraction moindre que $\frac{1}{3}$, & plus grande que $\frac{1}{4}$, il faudroit que 10^x, ou $10^{\frac{2}{7}}$, fût $= 2$; ou bien que la septieme puissance de $10^{\frac{2}{7}}$, c'est-à-dire 10^2 ou 100, fût égale à la septieme puissance de 2; or celle-ci est $= 128$, & par conséquent plus grande que celle-là. Nous concluons donc de là que $10^{\frac{2}{7}}$ est aussi moindre que 2, & qu'ainsi $\frac{2}{7}$ est moindre que L. 2, & que L. 2 qui s'étoit trouvé plus petit que $\frac{1}{3}$ est cependant plus grand que $\frac{2}{7}$.

Essayons encore une autre fraction qui soit, en conséquence de ce que nous venons de trouver, comprise entre $\frac{2}{7}$ & $\frac{1}{3}$. Une telle fraction est $\frac{3}{10}$, & il s'agit donc de voir si $10^{\frac{3}{10}} = 2$; si cela est, les dixiemes puissances de ces deux nombres sont aussi égales entr'elles; or la dixieme puissance de $10^{\frac{3}{10}}$ est $10^3 = 1000$, & la dixieme

puissance de 2 est $=1024$; il faut donc conclure que $10^{\frac{3}{10}}$ n'est pas $=2$, que $\frac{3}{10}$ est une fraction trop petite pour produire cette égalité, & que le L. 2, quoique plus petit que $\frac{1}{3}$ est cependant plus grand que $\frac{3}{10}$.

236.

Cette considération sert à nous faire voir que L. 2 a une grandeur déterminée, puisque nous savons que ce logarithme est certainement plus grand que $\frac{3}{10}$ & plus petit que $\frac{1}{3}$. Nous ne pouvons pas aller plus loin pour le présent, & puisque nous ignorons encore la vraie valeur de ce logarithme, nous l'indiquerons par x, en sorte que L. $2=x$; & nous montrerons comment, si elle étoit connue, on pourroit en déduire les logarithmes d'une infinité d'autres nombres. Nous nous servirons pour cet effet de l'équation rapportée plus haut L. $cd=$ L. $c+$ L. d, qui renferme la propriété, que le logarithme d'un produit se

trouve en ajoutant ensemble les logarithmes des facteurs.

237.

D'abord, comme $L.2=x$, & $L.10=1$, nous aurons $L.20=x+1$; $L.200=x+2$; $L.2000=x+3$; $L.20000=x+4$; & $L.200000=x+5$, &c.

238.

De plus, comme $L.c^2=2L.c$ & $L.c^3=3L.c$ & $L.c^4=4L.c$, &c. nous avons
$L.4=2x$; $L.8=3x$; $L.16=4x$; $L.32=5x$;
$L.64=6x$, &c. & nous trouvons par-là que
$L.40=2x+1$; $L.400=2x+2$;
$L.4000=2x+3$; $L.40000=2x+4$, &c.
$L.80=3x+1$; $L.800=3x+2$;
$L.8000=3x+3$; $L.80000=3x+4$, &c.
$L.160=4x+1$; $L.1600=4x+2$;
$L.16000=4x+3$; $L.160000=4x+4$, &c.

239.

Reprenons aussi l'autre équation fondamentale, $L.\frac{c}{d}=L.c-L.d$, & supposons

$c=10$, & $d=2$; puisque L.$10=1$ & L.$2=x$, nous aurons L.$\frac{10}{2}$ ou L.$5=1-x$, & nous déduirons de là les équations suivantes :

L.$50=2-x$; L.$500=3-x$;
L.$5000=4-x$, &c.
L.$25=2-2x$; L.$125=3-3x$;
L.$625=4-4x$, &c.
L.$250=3-2x$; L.$2500=4-2x$;
L.$25000=5-2x$, &c.
L.$1250=4-3x$; L.$12500=5-3x$;
L.$125000=6-3x$, &c.
L.$6250=5-4x$; L.$62500=6-4x$;
L.$625000=7-4x$, &c.

& ainsi de suite.

240.

Si l'on connoissoit le logarithme de 3, ce seroit encore le moyen de déterminer un nombre prodigieux d'autres logarithmes. En voici quelques preuves, en supposant le L.3 exprimé par la lettre y.

L.$30=y+1$; L.$300=y+2$;
L.$3000=y+3$, &c.

$L.9 = 2y$; $L.27 = 3y$; $L.81 = 4y$;
$L.243 = 5y$; &c.

On aura auſſi
$L.6 = x + y$; $L.12 = 2x + y$;
$L.18 = x + 2y$;
& $L.15 = L.3 + L.5 = y + 1 - x$.

241.

Nous avons vu plus haut que tous les nombres proviennent de la multiplication des nombres qu'on nomme premiers. Si l'on connoiſſoit donc ſeulement les logarithmes de tous les nombres premiers, on pourroit trouver par de ſimples additions les logarithmes de tous les autres nombres. Le nombre 210, par exemple, étant formé des facteurs 2, 3, 5, 7, ſon logarithme ſera $= L.2 + L.3 + L.5 + L.7$. Pareillement, puiſque $360 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3 3^2 5$, on a $L.360 = 3\,L.2 + 2\,L.3 + L.5$. Il eſt donc clair que moyennant les logarithmes des nombres premiers, on peut déterminer ceux de tous les autres nombres, & que c'eſt

c'eſt à déterminer ceux-là qu'il faut s'attacher avant toutes choſes, ſi l'on ſe propoſe de conſtruire des tables de logarithmes.

CHAPITRE XXIII.

De la maniere de repréſenter les Logarithmes.

242.

Nous avons vu que le logarithme de 2 eſt plus grand que $\frac{3}{10}$ & plus petit que $\frac{1}{3}$, & que par conſéquent l'expoſant de 10 doit tomber entre ces deux fractions, pour que la puiſſance devienne $= 2$. Or quoiqu'on ſache cela, quelque fraction cependant qu'on adopte conformément à cette condition, la puiſſance qui en réſulte ſera toujours un nombre irrationnel, plus grand ou plus petit que 2; & par conſéquent le logarithme de 2 ne ſauroit être exprimé par une telle fraction. Cela fait qu'il faut ſe contenter de déterminer la valeur de ce

logarithme d'une maniere assez approchée pour que l'erreur devienne insensible. On se sert pour cela des *fractions décimales ;* c'est ainsi qu'on nomme des quantités, dont la nature & les propriétés méritent d'être mises dans tout le jour possible.

243.

On sait que dans la maniere ordinaire d'écrire les nombres avec le secours des dix chiffres ou caracteres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

il n'y a que le premier chiffre à droite qui ait sa signification naturelle ; que les chiffres à la seconde place signifient dix fois plus que ce qu'ils signifieroient à la premiere ; que les chiffres à la troisieme place signifient cent fois davantage ; & ceux à la quatrieme mille fois davantage, & ainsi de suite ; c'est-à-dire qu'à mesure qu'ils avancent vers la gauche ils acquierent une valeur dix fois plus grande qu'ils n'avoient au rang précédent. C'est ainsi que dans le

nombre 1765 le chiffre 5 eſt au premier rang à la droite, & ſignifie auſſi 5 réellement. Au ſecond rang eſt 6; mais ce chiffre, au lieu de ſignifier 6, indique 10.6 ou 60. Le chiffre 7 eſt au troiſieme rang, & ſignifie 100.7 ou 700. Enfin le 1, qui eſt au quatrieme rang, ſignifie 1000; voilà donc pourquoi on prononce le nombre propoſé de cette maniere,

Un mille (ou *mille*,) *ſept cent*, *ſoixante & cinq*.

244.

Puiſque la valeur des chiffres devient toujours dix fois plus grande en allant de la droite vers la gauche, & que par conſéquent elle devient continuellement dix fois moindre en allant de la gauche vers la droite, on pourra en ſe conformant à cette loi avancer encore davantage vers la droite, & on obtiendra des chiffres dont la *ſignification* continuera de devenir dix fois moindre. Mais à quoi il faudra bien

faire attention, c'eſt la place où les chiffres ont leur valeur naturelle, on l'indique par une virgule qu'on met après ce rang. Si l'on rencontre donc, par exemple, le nombre 36,54892, voici comme il faut l'entendre : le chiffre 6 d'abord a ſa valeur naturelle; & le chiffre 3, qui eſt au ſecond rang, ſignifie 30. Mais le chiffre 5 qui vient après la virgule, ne ſignifie que $\frac{5}{10}$; enſuite le 4 ne vaut que $\frac{4}{100}$; le chiffre 8 ſignifie $\frac{8}{1000}$; le chiffre 9 ſignifie $\frac{9}{10000}$; & le chiffre 2 $\frac{2}{100000}$. On voit donc que plus ces chiffres avancent vers la droite, plus leurs valeurs diminuent, & qu'à la fin ces valeurs deviennent ſi petites, qu'on peut avec raiſon les regarder comme nulles (*).

(*) Les opérations de l'Arithmétique ſe pratiquent ſur les fractions décimales, de la même maniere que ſur les nombres entiers; il y a ſeulement quelques précautions à prendre après l'opération pour placer la virgule qui ſépare les nombres entiers des décimales. On peut conſulter ſur ce ſujet preſque tous les Traités d'Arithmétique. Lorſque dans la multiplication de ces fractions le multiplicande & le multiplicateur ont un grand nombre

245.

Voilà l'espece de nombres qu'on nomme *fractions décimales*, & c'est de cette maniere aussi qu'on indique les logarithmes dans les tables. On y exprime, par exemple, le logarithme de 2 par 0,3010300, où nous voyons 1.° que puisqu'il y a un 0 devant la virgule, ce logarithme ne fait pas un entier; 2°. que sa valeur est $\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}$. On peut remarquer qu'on auroit bien pu omettre les deux derniers zéros, mais c'est qu'ils servent à indiquer que le logarithme en question ne contient aucune de ces parties qui ont 1000000 & 10000000 pour dénominateur. On ne nie pas au reste qu'on

de décimales, l'opération seroit fort longue & donneroit un résultat beaucoup plus exact qu'on n'en a besoin communément; mais on peut la simplifier par une méthode qui ne se trouve pas dans beaucoup d'Auteurs, & que M. *Marie* a indiquée dans son édition des Leçons de Mathématiques de M. *de la Caille*, où il explique aussi une méthode semblable pour la division des décimales.

n'eût pu trouver, en continuant encore, des parties plus petites; mais pour ce qui eſt de celles-ci on les néglige à cauſe de leur extrême petiteſſe.

246.

Le logarithme de 3 ſe trouve exprimé dans les tables par 0,4771213; on voit donc qu'il ne contient point d'entier, & qu'il eſt compoſé des fractions ſuivantes: $\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}$. Mais il ne faut pas croire que de cette maniere le logarithme ſoit aſſigné avec la derniere préciſion. On peut ſeulement être certain que l'erreur eſt moindre que de $\frac{1}{10000000}$; il eſt vrai d'un autre côté que cette erreur eſt ſi petite, qu'on peut très-bien la négliger dans la plupart des calculs.

247.

Suivant cette façon d'exprimer les logarithmes, celui de 1 doit être indiqué

par 0,0000000, puisqu'il eſt réellement $=0$. Le logarithme de 10 eſt 1,0000000, où l'on reconnoît qu'il eſt exactement $=1$. Le logarithme de 100 eſt 2,0000000, ou exactement $=2$. Et l'on peut en conclure que les logarithmes de tous les nombres qui ſont contenus entre 10 & 100, & par conſéquent composés de deux chiffres, que ces logarithmes, dis-je, ſont compris entre 1 & 2, & par conſéquent qu'ils doivent s'exprimer par $1 +$ une fraction décimale. C'eſt ainſi que L. $50 = 1,6989700$; ſa valeur eſt donc l'unité, & outre cela $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. On n'aura pas de peine à remarquer de même que les logarithmes des nombres entre 100 & 1000 s'expriment par 2 entiers avec une fraction décimale. Ceux des nombres entre 1000 & 10000, par $3 +$ une fraction décimale. Ceux des nombres entre 10000 & 100000 par 4 entiers joints à une telle fraction, & ainſi de ſuite. Le *log.* 800, par exemle, eſt $= 2,9030900$; celui de 2290 eſt 3,3598355, &c.

248.

Les logarithmes au contraire des nombres moindres que 10, ou qui ne s'expriment que par un ſeul chiffre, ne font pas un entier, & voilà pourquoi on trouve un o devant la virgule. Ainſi nous avons deux parties à conſidérer dans un logarithme. La premiere eſt celle qui précede la virgule & qui indique les entiers quand il y en a; l'autre indique les fractions décimales qu'il faut ajouter aux entiers. La partie premiere ou entiere d'un logarithme, qu'on nomme le plus ſouvent la *caractériſtique*, ſe détermine facilement d'après ce que nous avons dit dans l'article précédent. Elle eſt o pour tous les nombres qui n'ont qu'un chiffre; elle eſt 1 pour ceux qui en ont deux; elle eſt 2 pour ceux qui en ont trois, & en général elle eſt toujours d'une unité moindre que le nombre des chiffres. Si donc on demande le logarithme de 1766, on ſait déjà que la premiere partie, ou celle des entiers, eſt 3 néceſſairement.

249.

Ainsi réciproquement on reconnoît à la premiere inspection de la premiere partie d'un logarithme, de combien de chiffres est composé le nombre qui répond à ce logarithme ; puisque le nombre de ces figures est toujours d'une unité plus grand que la partie des entiers du logarithme. Si on avoit trouvé, par exemple, pour le logarithme d'un nombre inconnu 6,4771213, on sauroit d'abord que ce nombre doit être de sept chiffres, & plus grand que 1000000. Et en effet ce nombre est 3000000 ; car $log.\ 3000000 = L.\ 3 + L.\ 1000000$. Or $L.3 = 0,4771213$, & $L.\ 1000000 = 6$, & la somme de ces deux logarithmes est 6,4771213.

250.

Le principal pour chaque logarithme est donc la fraction décimale qui suit la virgule, laquelle même une fois connue sert pour plusieurs nombres. Pour prouver ceci,

confidérons le logarithme du nombre 365 : fa premiere partie eft 2 fans contredit ; quant à l'autre ou la fraction décimale, indiquons-la, pour abréger, par la lettre x. Nous avons donc $L.\ 365 = 2 + x$. Or en multipliant continuellement par 10, nous aurons $L.\ 3650 = 3 + x$; $L.\ 36500 = 4 + x$; $L.\ 365000 = 5 + x$, & ainfi de fuite. Mais nous pouvons auffi rebrouffer & divifer continuellement par 10, cela nous donnera $L.\ 36{,}5 = 1 + x$; $L.\ 3{,}65 = 0 + x$; $L.\ 0{,}365 = -1 + x$; $L.\ 0{,}0365 = -2 + x$; $L.\ 0{,}00365 = -3 + x$, & ainfi de fuite.

251.

Tous ces nombres donc qui proviennent des figures 365, foit précédées, foit fuivies de zéros, ont toujours la même fraction décimale pour feconde partie du logarithme ; & toute la différence roule fur le nombre entier qui eft devant la virgule, lequel peut même, comme nous avons vu, devenir négatif, favoir quand le nombre

proposé est plus petit que 1. Or comme les Calculateurs ordinaires ont de la peine à traiter les nombres négatifs, on a coutume dans ce cas d'augmenter de 10 les entiers du logarithme, c'est-à-dire qu'on écrit 10 au lieu de 0 devant la virgule. De sorte qu'à la place de —1 on a 9; au lieu de —2 on a 8; au lieu de —3 on a 7, &c. Mais il ne faut jamais oublier alors que la caractéristique a été prise de dix unités trop grande, & ne pas s'imaginer que le nombre est de 10, ou 9 ou 8 chiffres. On sent bien que si dans le cas dont nous parlons, cette caractéristique est plus petite que 10, on ne peut commencer à écrire les chiffres du nombre qu'après une virgule. Par exemple, que si la caractéristique est 9, on doit commencer au premier rang après une virgule; que si elle est 8, il faut mettre encore un zéro à ce premier rang, & ne commencer à écrire les chiffres qu'au second rang. C'est ainsi que 9,5622929 seroit le logarithme de

0,365, & 8,5622929 le log. de 0,0365. Mais c'eſt dans les tables des ſinus principalement qu'on fait uſage de cette maniere d'écrire les logarithmes.

252.

On trouve dans les tables ordinaires les décimales des logarithmes pouſſées juſqu'à ſept chiffres ou figures, dont la derniere par conſéquent indique les $\frac{1}{10000000}$, & on eſt sûr qu'ils ne ſont jamais en défaut d'une telle petite partie entiere, & que l'erreur ne peut donc être d'aucune importance. Il y a cependant des calculs où l'on a beſoin d'une préciſion encore plus particuliere; on ſe ſert alors des grandes tables de *Vlacq*, où les logarithmes ſe trouvent calculés en dix décimales.

253.

Comme la premiere partie, ou la caractériſtique d'un logarithme, n'eſt ſujette à aucune difficulté, on l'indique rarement

dans les tables ; on n'y exprime que la seconde partie, ou les sept figures de la fraction décimale. On a des tables angloises où l'on trouve les logarithmes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 100000, & même ceux de nombres plus grands; parce que de petites tables additionnelles indiquent ce qu'il faut ajouter aux logarithmes, à raison des chiffres que les nombres proposés ont de plus que dans les tables. On trouve, par exemple, le logarithme de 379456 facilement, par le moyen de celui de 37945 & des petites tables dont nous parlons (*).

(*) Ces tables angloises sont celles que *Scherwin* publia au commencement de ce siecle, & qui ont été réimprimées plusieurs fois; on les trouve aussi dans les tables de *Gardiner*, dont les Astronomes se servent communément, & qui viennent d'être réimprimées à Avignon. Il est bon de remarquer à l'égard de ces tables, que comme les logarithmes n'y sont poussés que jusqu'à sept caracteres, abstraction faite de la caractéristique, on ne peut par leur moyen opérer avec une entiere exactitude que sur des nombres qui n'aient pas plus de six caracteres; mais quand on emploie les grandes tables de *Vlacq*,

254.

On comprendra aisément par ce qui a été dit, comment, ayant trouvé un logarithme, on doit prendre dans les tables le

où les logarithmes sont poussés jusqu'à dix caracteres en décimales, on peut, en prenant les parties proportionnelles, opérer, sans commettre aucune erreur, sur des nombres qui aient jusqu'à neuf caracteres. La raison de ce que nous venons de dire & les moyens de faire servir facilement ces tables à des opérations sur de plus grands nombres, se trouvent très-bien expliqués dans les *Elémens d'Algebre de* SAUNDERSON, Liv. IX, II.e Part.

Ces tables, au reste, ne donnent directement que les logarithmes qui répondent à des nombres proposés, & lorsqu'on veut repasser des logarithmes aux nombres, comme on rencontre rarement dans les tables le logarithme que l'on a, on est obligé le plus souvent de chercher ces nombres par une méthode d'interpolation, c'est-à-dire, par une voie indirecte. Pour suppléer à ce défaut on a calculé en Angleterre une autre table, qui a été publiée à Londres en 1742, sous le titre de *The Anti-logarithmic Canon, &c. by James* DODSON, & qui est encore assez peu connue; on y trouve les décimales des logarithmes rangées par ordre depuis 0,0001 jusqu'à 1,0000, & à côté les nombres correspondans poussés jusqu'à onze chiffres; on y trouve aussi les parties pro-

nombre qui lui convient. Cela deviendra encore plus clair par un exemple : multiplions les nombres 343 & 2401. Puisqu'il faut ajouter ensemble les logarithmes, on écrira le calcul de la façon qui suit :

$$\begin{array}{l r} L.\ 343 = & 2,5352941 \\ L.\ 2401 = & 3,3803922 \\ \hline & 5,9156863 \\ & 6847 \\ \hline & 16. \end{array}$$

Le nombre cherché est donc 823543.

Car la somme est le logarithme du produit cherché ; on voit par sa caractéristique 5 que ce produit est composé de six chiffres, & ceux-ci se trouvent par le moyen de la fraction décimale & de la table, être 823543.

255.

Comme c'est en particulier dans l'extraction des racines que les logarithmes

portionnelles nécessaires pour déterminer les nombres qui répondent aux logarithmes intermédiaires qui ne se trouvent pas dans la table.

rendent de grands ſervices, donnons auſſi un exemple de la maniere dont on les applique à cette partie du calcul. Suppoſez qu'il s'agiſſe d'extraire la racine quarrée de 10. Vous diviſez ſimplement par 2 le logarithme de 10, qui eſt 1,0000000; le quotient 0,5000000 eſt le logarithme de la racine cherchée. Or le nombre qui dans les tables répond à ce logarithme, eſt 3,16228, dont le quarré eſt effectivement égal à 10, à un cent millieme près dont il eſt plus grand.

SECTION

SECTION SECONDE.

Des différentes Méthodes de Calcul pour les Grandeurs composées ou complexes.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition des Quantités complexes.

256.

LORSQU'ON a deux ou plusieurs formules composées de plusieurs termes à ajouter ensemble, on ne fait souvent qu'indiquer cette addition par des signes, en mettant chaque formule entre deux parentheses, & en la liant avec les autres par le moyen du signe +. S'il s'agit, par exemple, d'ajouter ensemble les formules

$a+b+c$ & $d+e+f$, on indique la ſomme en cette maniere :

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

257.

On ſent bien que ce n'eſt pas là effectuer l'addition, que ce n'eſt que l'indiquer. Mais on voit auſſi que pour la faire réellement on n'a qu'à omettre les crochets; car le nombre $d+e+f$ devant être ajouté à l'autre, on ſait que cela ſe fait en y joignant d'abord $+d$, enſuite $+e$ & enſuite $+f$; ce qui donne donc la ſomme $a+b+c+d+e+f$.

On ſuivroit la même voie, ſi quelques-uns des termes étoient affectés du ſigne —; il faudroit les joindre de la même façon, moyennant le ſigne qui leur eſt propre.

258.

Afin de rendre ceci plus clair, nous conſidérerons un exemple en nombres purs; nous nous propoſerons d'ajouter à la formule $12-8$ cette autre $15-6$. Si nous

commençons donc par ajouter 15, nous aurons $12-8+15$; or c'étoit ajouter trop, puifqu'il ne falloit ajouter que $15-6$, & il eft clair que c'eft 6 que nous avons ajouté de trop. Otons, reprenons donc ces 6 en les écrivant avec leur figne négatif, nous aurons la fomme véritable

$$12-8+15-6.$$

D'où l'on voit que les fommes fe trouvent en écrivant tous les termes, chacun avec le figne qui lui eft propre.

259.

S'il eft donc queftion d'ajouter la formule $d-e-f$ à la formule $a-b+c$, on exprimera la fomme ainfi :

$$a-b+c+d-e-f,$$

en remarquant cependant qu'il n'importe en rien dans quel ordre on écrit ces termes. On peut les changer de place à volonté, pourvu qu'on leur conferve leurs fignes. Cette fomme pourroit, par exemple, s'écrire ainfi :

$$c-e+a-f+d-b.$$

260.

On voit aſſez que l'addition ne ſouffre aucune difficulté, de quelque forme que ſoient les termes à ajouter. S'il falloit ajouter enſemble les formules $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\,\text{L}.c$ & $5\sqrt[5]{a} - 7c$, on écriroit

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\,\text{L}.c + 5\sqrt[5]{a} - 7c,$$

ſoit dans cet ordre même, ſoit en changeant cet ordre des termes. La ſomme reviendra toujours à cela, ſi l'on ne change pas les ſignes.

261.

Mais il arrive ſouvent que les ſommes trouvées de cette maniere peuvent ſe réduire conſidérablement : ſavoir, quand deux ou pluſieurs termes ſe détruiſent les uns les autres. Par exemple, ſi l'on rencontre dans une même ſomme les termes $+a - a$ ou $3a - 4a + a$; ou bien quand on peut réduire deux ou pluſieurs termes en un ſeul. Voici des exemples de cette ſeconde réduction :

$3a+2a=5a$; $7b-3b=+4b$;
$-6c+10c=+4c$;
$5a-8a=-3a$; $-7b+b=-6b$;
$-3c-4c=-7c$;
$2a-5a+a=-2a$; $-3b-5b+2b=-6b$.

On peut donc abréger toutes les fois que deux ou plusieurs termes sont entiérement les mêmes quant aux lettres. Mais il ne faut pas confondre ces cas avec ceux-ci $2aa+3a$, ou $2b^3-b^4$; ceux de cette espece ne souffrent point de réduction.

262.

Considérons encore quelques exemples de réduction; le suivant nous conduira d'abord à une vérité très-utile. Supposez qu'il faille ajouter ensemble les formules $a+b$ & $a-b$; notre regle donne $a+b+a-b$; or $a+a=2a$, & $b-b=0$; la somme est donc $2a$; par conséquent si l'on ajoute ensemble la somme de deux nombres $(a+b)$ & leur différence $(a-b)$, on obtient le double du plus grand de ces deux nombres.

Voici encore d'autres exemples :

$3a-2b-c$	$a^3-2aab+2abb$
$5b-6c+a$	$-aab+2abb-b^3$
$4a+3b-7c$	$a^3-3aab+4abb-b^3.$

CHAPITRE II.

De la Soustraction des Quantités complexes.

263.

Si on ne veut qu'indiquer la soustraction, on enferme chaque formule entre deux crochets, en joignant par le signe $-$ la formule qui doit être soustraite à celle dont il faut la soustraire.

En soustrayant, par exemple, la formule $d-e+f$ de la formule $a-b+c$, on trouve le reste

$$(a-b+c)-(d-e+f);$$

& cette façon de l'indiquer donne suffisamment à connoître laquelle des deux formules doit être soustraite de l'autre.

264.

Mais quand on veut effectuer réellement la soustraction, il faut observer premiérement, qu'en soustrayant d'une quantité a une autre quantité positive $+b$, on obtient $a-b$. En second lieu, qu'en soustrayant de a une quantité négative $-b$, on obtient $a+b$; parce qu'ôter à quelqu'un une dette est autant que lui donner quelque chose.

265.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de soustraire de la formule $a-c$ la formule $b-d$, on ôtera d'abord b; ce qui donne $a-c-b$: or c'étoit ôter la quantité d de trop, puisqu'il ne falloit soustraire que $b-d$; il faudra donc restituer la valeur de d, & on aura

$$a-c-b+d;$$

d'où il est évident qu'il faut changer les signes des termes de la formule à soustraire,

& les joindre avec ces ſignes contraires aux termes de l'autre formule.

266.

Il eſt donc facile, moyennant cette regle, de faire la ſouſtraction, puiſqu'on ne fait qu'écrire, telle qu'elle eſt, la formule de laquelle il faut ſouſtraire, & que l'autre s'y joint ſans autre changement que celui des ſignes. C'eſt ainſi que dans le premier exemple, où il s'agiſſoit de ſouſtraire de $a-b+c$ la formule $d-e+f$, on obtient $a-b+c-d+e-f$.

Un exemple en nombres rendra cela encore plus clair. Si on ſouſtrait la formule $6-2+4$ de $9-3+2$, on obtient

$$9-3+2-6+2-4=0,$$

cela eſt évident; car $9-3+2=8$; de même $6-2+4=8$; or $8-8=0$.

267.

La ſouſtraction n'étant donc ſujette à aucune difficulté, il ne reſte qu'à faire

remarquer que ſi dans le reſte il ſe trouve deux ou pluſieurs termes tout-à-fait ſemblables quant aux lettres, ce reſte peut ſe réduire à une expreſſion plus abrégée, ſuivant les mêmes regles que nous avons données pour les ſommes dans l'addition.

268.

Qu'on ait à ſouſtraire de $a+b$, ou de la ſomme de deux quantités, leur différence $a-b$, on aura d'abord $a+b-a+b$; or $a-a=0$ & $b+b=2b$; le reſte cherché eſt donc $2b$, c'eſt-à-dire le double de la plus petite des deux quantités.

269.

Les exemples ſuivans tiendront lieu d'éclairciſſemens ultérieurs :

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$
$bb+ab-aa$	$2b+4c-6a$
$2aa.$	$9a-6b+c.$

$$
\begin{array}{r}
a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\
a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\
\hline
6aab + 2b^3.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\
\sqrt{a} - 3\sqrt{b} \\
\hline
+ 5\sqrt{b}.
\end{array}
$$

CHAPITRE III.

De la multiplication des Quantités complexes.

270.

LORSQU'IL n'est question que d'indiquer simplement une telle multiplication, on met entre deux crochets chacune des formules qui doivent être multipliées ensemble, & on les joint les unes aux autres, quelquefois sans aucun signe, quelquefois en mettant un · point ou le signe × entre deux. Par exempl. pour indiquer le produit

des deux formules $a-b+c$ & $d-e+f$ multipliées l'une par l'autre, on écrit

$(a-b+c).(d-e+f)$ ou $(a-b+c)\times(d-e+f)$.

On se sert beaucoup de cette façon d'indiquer les produits, parce qu'elle donne à connoître sur le champ de quels facteurs ils sont composés.

271.

Mais pour montrer comment on doit s'y prendre pour faire une multiplication effective, nous remarquerons d'abord que pour multiplier, par exemple, une formule comme $a-b+c$ par 2, on en multiplie chaque terme séparément par ce nombre, de sorte qu'on obtient

$$2a-2b+2c.$$

Or la même chose a lieu pour tous les autres nombres. Si c'étoit par d qu'il fallût multiplier la même formule, on obtiendroit

$$ad-bd+cd.$$

272.

Nous avons ſuppoſé tout-à-l'heure que d étoit un nombre poſitif ; mais ſi c'eſt par un nombre négatif comme $-e$, que la multiplication doit ſe faire, il faut ſe rappeler la regle que nous avons donnée plus haut, que deux ſignes contraires multipliés enſemble font $-$, & que deux ſignes égaux donnent $+$. On aura donc :

$$-ae+be-ce.$$

273.

Pour faire voir à préſent comment une formule, comme A, qu'elle ſoit ſimple ou complexe, doit être multipliée par une formule complexe $d-e$; nous conſidérerons d'abord un exemple en nombres ordinaires, en ſuppoſant que A doive être multiplié par $7-3$. Or il eſt évident que c'eſt ici le quadruple de A qu'on demande ; car ſi l'on prend d'abord A ſept fois, il faudra ſouſtraire enſuite A pris trois fois.

En général donc s'il s'agit de multiplier par $d-e$, on multipliera la formule A d'abord par d & enſuite par e, & on ſouſtraira ce dernier produit du premier ; d'où réſulte $dA-eA$.

Suppoſons maintenant $A=a-b$, & que c'eſt cette quantité-ci qu'il faut multiplier par $d-e$; nous aurons

$$dA=ad-bd$$
$$eA=ae-be;$$

donc le prod. cherc. $=ad-bd-ae+be$.

274.

Puiſque nous connoiſſons donc le produit $(a-b).(d-e)$, & que nous n'avons pas lieu de douter de ſa juſteſſe, nous nous remettrons le même exemple de multiplication ſous les yeux, ſous la forme que voici ;

$$\begin{array}{l} a-b \\ d-e \\ \hline ad-bd-ae+be. \end{array}$$

Il nous fait voir qu'il faut multiplier chaque terme de la formule supérieure par chaque terme de la formule inférieure, & que pour ce qui regarde les signes il faut observer strictement la regle donnée plus haut; regle qui se confirmeroit par-là entiérement, si elle avoit pu être révoquée en doute le moins du monde.

275.

Il sera facile, d'après cette regle, de calculer l'exemple suivant, qui est de multiplier $a+b$ par $a-b$:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ \quad\;\; -ab-bb \\ \hline \end{array}$$

le produit sera $= aa - bb$.

276.

On sait qu'on peut substituer pour a & b des nombres déterminés à volonté; ainsi

l'exemple que nous venons de donner, renferme le principe que voici : le produit de la fomme de deux nombres multipliée par leur différence eft égal à la différence des quarrés de ces nombres. On peut exprimer cette vérité en cette maniere :

$$(a+b)\times(a-b)=aa-bb.$$

Et on en conclut cette autre vérité : que la différence de deux nombres quarrés eft toujours un produit, & divifible tant par la fomme que par la différence des racines de ces deux quarrés ; & que par conféquent la différence de deux quarrés ne peut jamais être un nombre premier.

277.

Calculons encore quelques autres exemples :

I.)

$$\begin{array}{r} 2a-3 \\ a+2 \\ \hline 2aa-3a \\ +4a-6 \\ \hline 2aa+a-6. \end{array}$$

II.)

$$\begin{array}{r} 4aa-6a+9 \\ 2a+3 \\ \hline 8a^3-12aa+18a \\ +12aa-18a+27 \\ \hline 8a^3+27. \end{array}$$

III.)

$$
\begin{array}{l}
3aa - 2ab - bb \\
2a - 4b \\
\hline
6a^3 - 4aab - 2abb \\
\quad - 12aab + 8abb + 4b^3 \\
\hline
6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3.
\end{array}
$$

IV.)

$$
\begin{array}{l}
aa + 2ab + 2bb \\
aa - 2ab + 2bb \\
\hline
a^4 + 2a^3b + 2aabb \\
\quad - 2a^3b - 4aabb - 4ab^3 \\
\qquad + 2aabb + 4ab^3 + ab^4 \\
\hline
a^4 + 4b^4.
\end{array}
$$

V.)

$$
\begin{array}{l}
2aa - 3ab - 4bb \\
3aa - 2ab + bb \\
\hline
6a^4 - 9a^3b - 12aabb \\
\quad - 4a^3b + 6aabb + 8ab^3 \\
\qquad + 2aabb - 3ab^3 - 4b^4 \\
\hline
6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4.
\end{array}
$$

VI.)

VI.)

$$\begin{array}{l} aa+bb+cc-ab-ac-bc \\ a+b+c \\ \hline a^3+abb+acc-aab-aac-abc \\ \quad -abb-acc+aab+aac-abc+b^3+bcc-bbc \\ \quad\quad\quad\quad -abc\quad -bcc+bbc+c^3 \\ \hline a^3-3abc+b^3+c^3. \end{array}$$

278.

Lorſqu'on a plus de deux formules à multiplier enſemble, on comprendra ſans doute qu'après en avoir multiplié deux l'une par l'autre, il faut enſuite multiplier ce produit par une de celles qui reſtent, & ainſi de ſuite ; & qu'il eſt indifférent quel ordre on ſuive dans ces multiplications. Qu'on ſe propoſe, par exemple, de trouver la valeur du produit ſuivant compoſé de quatre facteurs :

I.	II.	III.	IV.
$(a+b)$	$(aa+ab+bb)$	$(a-b)$	$(aa-ab+bb)$,

on multipliera d'abord les facteurs I & II :

$$\begin{array}{rl} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{I.} & a+b \\ \hline & a^3+aab+abb \\ & \quad +aab+abb+b^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3+2aab+2abb+b^3. \end{array}$$

Après cela on multipliera les facteurs III & IV :

$$\begin{array}{rl} \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3-aab+abb \\ & \quad -aab+abb-b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3-2aab+2abb-b^3. \end{array}$$

Il reste donc à multiplier le premier produit I, II, par ce second produit III, IV :

$$\begin{array}{l} a^3+2aab+2abb+b^3 \quad \text{I. II.} \\ a^3-2aab+2abb-b^3 \quad \text{III. IV.} \\ \hline a^6+2a^5b+2a^4bb+a^3b^3 \\ \quad -2a^5b-4a^4bb-4a^3b^3-2aab^4 \\ \qquad +2a^4bb+4a^3b^3+4aab^4+2ab^5 \\ \qquad\quad -a^3b^3-2aab^4-2ab^5-b^6 \\ \hline a^6-b^6. \end{array}$$

Et ceci est le produit cherché.

279.

Reprenons le même exemple, mais changeons-en l'ordre, en multipliant d'abord les formules I & III, & ensuite les formules II & IV :

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & a+b \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & aa+ab \\ & \quad -ab-bb \\ \hline \text{I. III.} & =aa-bb. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \hline & a^4+a^3b+aabb \\ & \quad -a^3b-aabb-ab^3 \\ & \qquad +aabb+ab^3+b^4 \\ \hline \text{II. IV.} & =a^4+aabb+b^4. \end{array}$$

Multipliant enfin ces deux produits I, III & II, IV :

$$\text{II. IV.} = a^4 + aabb + b^4$$
$$\text{I. III.} = aa - bb$$
$$\overline{a^6 + a^4bb + aab^4}$$
$$- a^4bb - aab^4 - b^6$$

on a $a^6 - b^6$,

qui eſt le produit cherché.

280.

Nous ferons ce calcul encore dans un autre ordre, en multipliant d'abord la I.re formule par la IV.e, & enſuite la II.e par la III.e

$$\text{IV.}\ aa - ab + bb$$
$$\text{I.}\ \ a + b$$
$$\overline{a^3 - aab + abb}$$
$$+ aab - abb + b^3$$

$$\text{I. IV.} = a^3 + b^3.$$

$$\begin{array}{ll} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3+aab+abb \\ & \quad -aab-abb-b^3 \\ \hline \end{array}$$

II. III. $=a^3-b^3$.

Il reste à multiplier les produits I, IV & II, III.

$$\begin{array}{rl} \text{I. IV.} & =a^3+b^3 \\ \text{II. III.} & =a^3-b^3 \\ \hline & a^6+a^3b^3 \\ & \quad -a^3b^3-b^6 \\ \hline \end{array}$$

& l'on trouve encore a^6-b^6.

281.

Il eſt à propos d'éclaircir cet exemple par une application numérique. Faiſons $a=3$ & $b=2$, nous aurons $a+b=5$ & $a-b=1$; de plus, $aa=9$, $ab=6$, $bb=4$. Donc $aa+ab+bb=19$ & $aa-ab+bb=7$. Donc on demande le produit de 5 . 19 . 1 . 7, qui eſt 665.

Or $a^6=729$ & $b^6=64$, par conséquent le produit cherché $a^6-b^6=665$, comme nous venons de le dire.

CHAPITRE IV.

De la Division des Quantités complexes.

282.

QUAND on ne veut qu'indiquer la division, on se sert ou de la marque ordinaire des fractions, qui est d'écrire le dénominateur sous le numérateur, & en les séparant par un trait ; ou bien de deux crochets qui renferment chaque formule, & en mettant deux points entre le diviseur & le dividende. S'il est question, par exemple, de diviser $a+b$ par $c+d$, on indique le quotient ainsi, $\frac{a+b}{c+d}$, suivant la premiere maniere ; & de cette façon, $(a+b):(c+d)$, suivant la seconde. L'une & l'autre expression se prononce $a+b$ *divisé par* $c+d$.

283.

S'il s'agit de divifer une formule compofée par une formule fimple, on divife chaque terme féparément. Par exemple: $6a - 8b + 4c$ divifé par 2 fait $3a - 4b + 2c$; & $(aa - 2ab) : (a) = a - 2b$. De même $(a^3 - 2aab + 3abb) : (a) = aa - 2ab + 3bb$; $(4aab - 6aac + 8abc) : (2a) = 2ab - 3ac + 4bc$; $(9aabc - 12abbc + 15abcc) : (3abc) = 3a - 4b + 5c$ &c.

284.

S'il arrive qu'un des termes du dividende ne foit pas divifible par le divifeur, on indique le quotient par une fraction, comme dans la divifion de $a + b$ par a, qui donne $1 + \frac{b}{a}$. De même
$(aa - ab + bb) : (aa) = 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}$.

Par la même raifon, fi l'on divife $2a + b$ par 2, on obtient $a + \frac{b}{2}$; & on peut remarquer à cette occafion qu'on pourroit écrire $\frac{1}{2} b$ au lieu de $\frac{b}{2}$, parce que $\frac{1}{2}$ fois b

eſt autant que $\frac{b}{2}$. Pareillement $\frac{b}{3}$ eſt autant que $\frac{1}{3}b$, & $\frac{2b}{3}$ autant que $\frac{2}{3}b$, &c.

285.

Mais quand le diviſeur eſt lui-même une quantité complexe, la diviſion a plus de difficultés. Souvent elle a lieu où on s'en doute le moins; mais lorſqu'elle ne peut ſe faire, il faut ſe contenter d'indiquer le quotient par une fraction, de la maniere que nous avons dit. Nous commencerons par conſidérer quelques cas où la diviſion effective réuſſit.

286.

Suppoſons qu'il s'agiſſe de diviſer le dividende $ac-bc$ par le diviſeur $a-b$, il faut donc que le quotient ſoit tel qu'étant multiplié par le diviſeur $a-b$, on obtienne le dividende $ac-bc$. Or on voit aiſément que ce quotient doit renfermer un c, puiſque ſans cela on ne pourroit obtenir ac. Afin donc de voir ſi c eſt le quotient entier,

on n'a qu'à le multiplier par le diviſeur, & voir ſi cette multiplication produit le dividende en entier, ou ſi elle n'en donne qu'une partie. Dans notre cas, ſi nous multiplions $a-b$ par c, nous avons $ac-bc$ qui eſt en effet le dividende même; de ſorte que c eſt le quotient complet. Il n'eſt pas moins clair que

$(aa+ab):(a+b)=a$; $(3aa-2ab):(3a-2b)=a$;
$(6aa-9ab):(2a-3b)=3a$, &c.

287.

On ne peut manquer de cette maniere de trouver une partie du quotient; ſi donc ce qu'on a vu multiplié par le diviſeur, n'épuiſe pas encore le dividende, on n'a qu'à diviſer le réſidu encore par le diviſeur, pour obtenir une ſeconde partie du quotient; & l'on continuera de la même maniere juſqu'à ce qu'on ait trouvé le quotient en entier.

Diviſons, afin de donner un exemple, $aa+3ab+2bb$ par $a+b$; il eſt clair en

premier lieu que le quotient contiendra le terme a, puisque, si cela n'étoit pas, on n'obtiendroit point aa. Or en multipliant le diviseur $a+b$ par a, il provient $aa+ab$; laquelle quantité étant soustraite du dividende, laisse un reste $2ab+2bb$. Ce reste, il faut aussi le diviser par $a+b$; & il saute aux yeux que le quotient de cette division doit contenir le terme $2b$. Or $2b$ multiplié par $a+b$ fait exactement $2ab+2bb$; par conséquent $a+2b$ est ce quotient cherché qui, multiplié par le diviseur $a+b$, doit produire le dividende $aa+3ab+2bb$. Voici toute l'opération :

$$
\begin{array}{l}
a+b)aa+3ab+2bb(a+2b \\
\quad\quad aa+ab \\
\hline
\quad\quad\quad +2ab+2bb \\
\quad\quad\quad +2ab+2bb \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

288.

On se facilite cette opération en faisant choix d'un des termes du diviseur pour

l'écrire le premier, & pour ranger ensuite les termes du dividende, en commençant par les plus hautes puissances de ce premier terme du divisèur. Ce terme étoit a dans l'exemple précédent. Les exemples suivans rendront la chose encore plus claire :

$$
\begin{array}{l}
a-b)\,a^3-3aab+3abb-b^3\,(aa-2ab+bb \\
\quad a^3-aab \\
\hline
\quad -2aab+3abb \\
\quad -2aab+2abb \\
\hline
\qquad +abb-b^3 \\
\qquad +abb-b^3 \\
\hline
\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a+b)\,aa-bb\,(a-b \\
\quad aa+ab \\
\hline
\quad -ab-bb \\
\quad -ab-bb \\
\hline
\qquad 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3a-2b)\ 18aa-8bb(6a+4b \\
\quad 18aa-12ab \\
\hline
\qquad +12ab-8bb \\
\qquad +12ab-8bb \\
\hline
\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a+b)\ a^3+b^3\ (aa-ab+bb \\
\quad a^3+aab \\
\hline
\quad -aab+b^3 \\
\quad -aab-abb \\
\hline
\qquad +abb+b^3 \\
\qquad +abb+b^3 \\
\hline
\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2a-b)\ 8a^3-b^3\ (4aa+2ab+bb \\
\quad 8a^3-4aab \\
\hline
\quad +4aab-b^3 \\
\quad +4aab-2abb \\
\hline
\qquad +2abb-b^3 \\
\qquad +2abb-b^3 \\
\hline
\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

$$aa - 2ab + bb)\ a^4 - 4a^3 + 6aabb - 4ab^3 + b^4$$
$$aa - 2ab + bb)\ a^4 - 2a^3b + aabb$$
$$-2a^3b + 5aabb - 4ab^3$$
$$-2a^3b + 4aabb - 2ab^3$$
$$+ aabb - 2ab^3 + b^4$$
$$+ aabb - 2ab^3 + b^4$$
$$0.$$

$$aa - 2ab + 4bb)\ a^4 + 4aabb + 16b^4$$
$$aa + 2ab + 4bb)\ a^4 - 2a^3b + 4aabb$$
$$+2a^3b + 16b^4$$
$$+2a^3b - 4aabb + 8ab^3$$
$$+4aabb - 8ab^3 + 16b^4$$
$$+4aabb - 8ab^3 + 16b^4$$
$$0.$$

$$aa - 2ab + 2bb)\ a^4 + 4b^4$$
$$aa + 2ab + 2bb)\ a^4 - 2a^3b + 2aabb$$
$$+2a^3b - 2aabb + 4b^4$$
$$+2a^3b - 4aabb + 4ab^3$$
$$+2aabb - 4ab^3 + 4b^4$$
$$+2aabb - 4ab^3 + 4b^4$$
$$0.$$

$$
\begin{array}{rl}
1-2x+xx) & 1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5 \\
1-3x+3xx-x^3) & 1-2x+xx \\
\hline
 & -3x+9xx-10x^3 \\
 & -3x+6xx-\ 3x^3 \\
\hline
 & \quad +3xx-\ 7x^3+5x^4 \\
 & \quad +3xx-\ 6x^3+3x^4 \\
\hline
 & \qquad -\ x^3+2x^4-x^5 \\
 & \qquad -\ x^3+2x^4-x^5 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

CHAPITRE V.

De la Résolution des Fractions en des suites infinies (*).

289.

QUAND le dividende n'est pas divisible par le diviseur, le quotient s'exprime, comme nous l'avons déjà dit, par une fraction.

(*) La *théorie des séries* est une des plus importantes de toutes les Mathématiques. Les séries dont il est question

C'eſt ainſi que ſi l'on doit diviſer 1 par $1-a$, on obtient la fraction $\frac{1}{1-a}$. Cela n'empêche pas cependant qu'on ne puiſſe entreprendre la diviſion ſuivant les regles que nous avons données, & qu'on ne puiſſe la continuer auſſi loin qu'on veut. On ne laiſſera pas de trouver le vrai quotient, quoique ſous des formes différentes.

290.

Pour le prouver, diviſons réellement le dividende 1 par le diviſeur $1-a$, comme on va voir :

dans ce chapitre, ont été trouvées par *Mercator* au milieu du ſiecle paſſé, & *Newton* trouva bientôt après celles qui dérivent de l'extraction des racines, & dont il ſera queſtion au chapitre XII. Cette théorie a reçu enſuite un nouveau degré de perfection de pluſieurs autres Géometres diſtingués. Les Œuvres de *Jacques Bernoulli* & la ſeconde partie du *Calcul différentiel* de M. *Euler*, ſont les ouvrages où l'on pourra le mieux s'inſtruire ſur ces matieres. On trouvera auſſi dans les Mémoires de Berlin pour 1768, une nouvelle méthode de M. *de la Grange* pour réſoudre, par le moyen des ſuites infinies, toutes les équations littérales de quelque degré qu'elles ſoient.

$1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a}$ ou $1-a)\ 1\ (1+a+\frac{aa}{1-a}$

$\underline{+1-a}$ $\qquad\qquad$ $\underline{+1-a}$

résidu $+a$. $\qquad\qquad$ $+a$

$\underline{+a-aa}$

résidu $+aa$

Pour trouver encore un plus grand nombre de formes, on n'a qu'à continuer en divisant aa par $1-a$:

$1-a)\,aa\,(aa+\frac{a^3}{1-a}$ ensuite $1-a)\,a^3\,(a^3+\frac{a^4}{1-a}$

$\underline{aa-a^3}$ $\qquad\qquad$ $\underline{a^3-a^4}$

$+a^3$ $\qquad\qquad$ $+a^4$

& puis $1-a)\ a^4\ (a^4+\frac{a^5}{1-a}$

$\underline{a^4-a^5}$

$+a^5$, &c.

291.

Nous voyons par-là que la fraction $\frac{1}{1-a}$ peut se mettre sous toutes les formes qui suivent :

I.) $1+\frac{a}{1-a}$; II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$;

III.)

III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$;

IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$;

V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, &c.

Or en considérant la premiere de ces formules, qui est $1+\frac{a}{1-a}$, & en faisant attention que 1 est autant que $\frac{1-a}{1-a}$, nous avons

$$1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}.$$

Si on suit le même procédé pour la seconde formule $1+a+\frac{aa}{1-a}$, c'est-à-dire que l'on réduise la partie des entiers $1+a$ au même dénominateur $1-a$, on aura $\frac{1-aa}{1-a}$, à quoi si l'on ajoute $+\frac{aa}{1-a}$ on aura $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, c'est-à-dire $\frac{1}{1-a}$.

Dans la 3.[e] formule $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, les entiers, réduits au dénominateur $1-a$, font $\frac{1-a^3}{1-a}$; & si on y ajoute la fraction $\frac{a^3}{1-a}$ on a $\frac{1}{1-}$; donc toutes ces formules

sont en effet égales en valeur à la fraction proposée $\frac{1}{1-a}$.

292.

Cela étant on pourra aller plus loin & aussi loin qu'on voudra, sans avoir besoin de calculer davantage. On aura donc $\frac{1}{1-a} = 1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$; ou bien on pourroit continuer encore, & même sans jamais finir. C'est pourquoi l'on peut dire que la fraction proposée a été résolue en une suite infinie, laquelle est, $1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} +$ &c. à l'infini. Et on est très-fondé à soutenir que la valeur de cette série infinie est la même que celle de la fraction $\frac{1}{1-a}$.

293.

Ce que nous venons de dire peut, au premier abord, paroître étonnant; mais la considération de quelques cas particuliers le fera comprendre aisément.

Supposons premiérement $a = 1$; notre suite deviendra $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, &c. jusqu'à l'infini. La fraction $\frac{1}{1-a}$, à laquelle elle doit être égale, devient $\frac{1}{0}$; or nous avons remarqué plus haut que $\frac{1}{0}$ est un nombre infiniment grand; cela se confirme donc ici d'une maniere élégante.

Mais si l'on suppose $a = 2$, notre suite devient $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, &c. à l'infini, & sa valeur doit être $\frac{1}{1-2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{-1} = -1$; ce qui au premier coup d'œil semblera absurde. Mais il faut remarquer que si l'on veut s'arrêter à quelque terme de la série susdite, on ne doit le faire qu'en joignant la fraction qui reste. Supposons, par exemple, que nous voulions nous arrêter à 64, il faudra, après avoir écrit $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, joindre la fraction $\frac{128}{1-2}$ ou $\frac{128}{-1}$ ou -128; on aura donc $127 - 128$, c'est-à-dire en effet -1.

Que si on continuoit sans cesse la suite,

il ne feroit à la vérité plus queftion de la fraction, mais auffi on ne s'arrêteroit jamais.

294.

Voilà donc des confidérations néceffaires, quand on prend pour a des nombres plus grands que l'unité. Mais fi l'on fuppofe a plus petit que 1, tout devient plus facile à concevoir.

Soit, par exemple, $a=\frac{1}{2}$; on aura $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, ce qui fera égal à la férie fuivante: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$ &c. à l'infini. Or fi l'on prend deux termes feulement de cette fuite, on a $1+\frac{1}{2}$, & il s'en faut de $\frac{1}{2}$ qu'elle ne foit égale à $\frac{1}{1-a}=2$. Si on prend trois termes, il s'en faut encore de $\frac{1}{4}$; car la fomme eft $1\frac{3}{4}$. Si l'on prend quatre termes on a $1\frac{7}{8}$, & il ne manque plus que $\frac{1}{8}$. On voit donc que plus on prend de termes, & plus la différence devient petite, & que par conféquent fi,

on continue à l'infini, il n'y aura plus de différence du tout entre la somme de la suite & la valeur 2 de la fraction $\frac{1}{1-a}$.

295.

Soit $a=\frac{1}{3}$; notre fraction $\frac{1}{1-a}$ sera $=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$ $=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, à quoi se réduit par conséquent la suite $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ &c. jusqu'à l'infini.

Quand on prend deux termes on a $1\frac{1}{3}$, & il manque $\frac{1}{6}$. Si vous prenez trois termes, vous avez $1\frac{4}{9}$, & il manquera encore $\frac{1}{18}$. Prenez quatre termes, vous aurez $1\frac{13}{27}$, & la différence est $\frac{1}{54}$. Puis donc que l'erreur devient toujours trois fois moindre, il faut bien qu'à la fin elle s'évanouisse.

296.

Supposons $a=\frac{2}{3}$; nous aurons $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$ $=3$, & la suite $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}$ &c. jusqu'à l'infini. Prenant d'abord $1\frac{2}{3}$,

l'erreur est $1\frac{1}{3}$; prenant trois termes, qui font $2\frac{1}{9}$, l'erreur est de $\frac{8}{9}$; prenant quatre termes on a $2\frac{11}{27}$, & l'erreur est encore de $\frac{16}{27}$.

297.

Si $a=\frac{1}{4}$, la fraction est $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=1\frac{1}{3}$; & la suite devient $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$, &c. Les deux premiers termes faisant $1+\frac{1}{4}$, produiront $\frac{1}{12}$ d'erreur ; & prenant un terme de plus on a $1\frac{5}{16}$, c'est-à-dire seulement $\frac{1}{48}$ d'erreur.

298.

On pourra de la même maniere résoudre en série infinie la fraction $\frac{1}{1+a}$, en divisant réellement le numérateur 1 par le dénominateur $1+a$, comme on va voir :

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1 \quad (1-a+aa-a^3+a^4 \\
\underline{1+a} \\
-a \\
\underline{-a-aa} \\
+aa \\
\underline{+aa+a^3} \\
-a^3 \\
\underline{-a^3-a^4} \\
+a^4 \\
\underline{+a^4+a^5} \\
-a^5, \ \&c.
\end{array}
$$

d'où il suit que la fraction $\frac{1}{1+a}$ est égale à la suite,

$1-a+aa-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7$, &c.

299.

Si l'on pose $a=1$, on a cette comparaison remarquable :

$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1$, &c. à l'infini. On y trouvera quelque chose de contradictoire ; car si on s'arrête à -1,

la série donne o; & si on finit par $+1$, elle donne 1. Mais c'est là précisément ce qui tranche le nœud; car puisqu'on doit continuer jusqu'à l'infini sans s'arrêter jamais ni à -1, ni à $+1$, il est clair que la somme ne peut être ni o ni 1, & qu'il faut que ce résultat final tienne un milieu entre ces deux, & qu'il soit $\frac{1}{2}$.

300.

Faisons à présent $a = \frac{1}{2}$, notre fraction sera $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, laquelle doit donc exprimer la valeur de la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$, &c. à l'infini. Si l'on ne prend de cette série que les deux premiers termes, on a $\frac{1}{2}$, ce qui est trop peu de $\frac{1}{6}$. Si l'on prend trois termes, on a $\frac{3}{4}$, ce qui est trop de $\frac{1}{12}$. Si l'on prend quatre termes, on a $\frac{5}{8}$, ce qui est trop peu de $\frac{1}{24}$, &c.

301.

Suppoſons encore $a = \frac{1}{3}$; notre fraction ſera $= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, & c'eſt à quoi doit ſe réduire la férie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$, &c. à l'infini. Or en conſidérant ſeulement deux termes on a $\frac{2}{3}$, c'eſt trop peu de $\frac{1}{12}$. Trois termes font $\frac{7}{9}$, c'eſt trop de $\frac{1}{36}$. Quatre termes font $\frac{20}{27}$, c'eſt trop peu de $\frac{1}{108}$, & ainſi de ſuite.

302.

La fraction $\frac{1}{1+a}$ peut ſe réſoudre encore d'une autre maniere; ſavoir en diviſant 1 par $a + 1$, comme il ſuit:

$$
\begin{array}{l}
a+1)\,1 \quad (\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \\
\underline{1+\frac{1}{a}} \\
-\frac{1}{a} \\
\underline{-\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}} \\
+\frac{1}{aa} \\
\underline{+\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}} \\
-\frac{1}{a^3} \\
\underline{-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}} \\
+\frac{1}{a^4} \\
\underline{+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}} \\
-\frac{1}{a^5},\ \&c.
\end{array}
$$

Par conséquent notre fraction $\frac{1}{a+1}$ est égale à la suite infinie $\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$, &c. Qu'on fasse $a=1$, on aura la

série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, &c. $= \frac{1}{2}$, comme ci-dessus. Et si l'on suppose $a = 2$, on aura la série $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ &c. $= \frac{1}{3}$.

303.

C'est d'une maniere semblable qu'on pourra résoudre généralement en une suite infinie la fraction $\frac{c}{a+b}$, on aura

$$a+b)\,c\quad\left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}, \text{ \&c.}\right.$$

$$\frac{c + \frac{bc}{a}}{\quad}$$

$$-\frac{bc}{a}$$

$$\frac{-\frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}}{\quad}$$

$$+\frac{bbc}{aa}$$

$$\frac{+\frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3}}{\quad}$$

$$-\frac{b^3c}{a^3}$$

$$\frac{-\frac{b^3c}{a^3} - \frac{b^4c}{a^4}}{\quad}$$

$$+\frac{b^4c}{a^4};$$

d'où l'on voit qu'on peut comparer $\frac{c}{a+b}$ avec la série $\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}$ &c. jusqu'à l'infini.

Soit $a=2$, $b=4$, $c=3$, nous aurons $\frac{c}{a+b}=\frac{3}{4+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12$, &c.

Soit $a=10$, $b=1$ & $c=11$, nous avons $\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}$ &c.

Si on ne considere qu'un seul terme de cette suite, on a $\frac{11}{10}$, ce qui est trop de $\frac{1}{10}$; si on prend deux termes, on a $\frac{99}{100}$, c'est trop peu de $\frac{1}{100}$; si on prend trois termes, on a $\frac{1001}{1000}$, c'est trop de $\frac{1}{1000}$, &c.

304.

Quand il y a plus de deux termes dans le diviseur, on peut également continuer la division jusqu'à l'infini, de la même maniere.

C'est ainsi que si on proposoit la fraction $\frac{1}{1-a+aa}$, la suite infinie à laquelle elle est égale, se trouveroit comme il suit :

$$
\begin{array}{l}
1-a+aa)\ 1\ (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7,\ \&c.\\
\underline{1-a+aa}\\
+a-aa\\
\underline{+a-aa+a^3}\\
-a^3\\
\underline{-a^3+a^4-a^5}\\
-a^4+a^5\\
\underline{-a^4+a^5-a^6}\\
+a^6\\
\underline{+a^6-a^7+a^8}\\
+a^7-a^8\\
\underline{+a^7-a^8+a^9}\\
-a^9.
\end{array}
$$

Nous avons donc l'équation $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$, &c. sans fin. Si nous faisons ici $a = 1$, nous avons $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$, &c. laquelle série contient deux fois la série trouvée plus haut $1 - 1 + 1 - 1 + 1$, &c. or comme nous avons trouvé celle-ci $= \frac{1}{2}$, il n'est pas étonnant que nous trouvions $\frac{2}{2}$ ou 1 pour la valeur de celle que nous venons de déterminer.

Qu'on fasse $a = \frac{1}{2}$, on aura l'équation $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$, &c.

Qu'on suppose $a = \frac{1}{3}$, on aura l'équation $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$, &c. Si on prend les quatre premiers termes de cette suite, on a $\frac{104}{81}$, qui n'est que de $\frac{1}{567}$ moins que $\frac{9}{7}$.

Supposons encore $a = \frac{2}{3}$, nous aurons $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ &c. il faut donc que cette suite soit égale à la précédente ; & soustrayant l'une de l'autre, il faut que $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ &c. Ces quatre termes ajoutés ensemble font $-\frac{2}{81}$.

305.

La méthode que nous avons exposée sert à résoudre généralement toutes les fractions en suites infinies, & par-là elle est souvent

de la plus grande utilité. De plus il eſt très-remarquable d'ailleurs qu'une ſérie infinie, quoiqu'elle ne ceſſe jamais, puiſſe avoir une valeur déterminée. Auſſi a-t-on tiré de ce fonds les inventions les plus importantes, & cette matiere mérite d'autant plus, qu'on l'étudie avec toute l'attention poſſible.

CHAPITRE VI.

Des Quarrés des Quantités complexes.

306.

QUAND il s'agit de trouver le quarré d'une grandeur complexe, on n'a qu'à la multiplier par elle-même, le produit ſera le quarré qu'on cherche.

Par exemple, le quarré de $a+b$ ſe trouve de la maniere ſuivante :

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb. \end{array}$$

307.

Ainsi quand la racine consiste en deux termes ajoutés ensemble, comme $a+b$, le quarré renferme, 1.° les quarrés de l'un & de l'autre terme, savoir aa & bb; 2.° le double du produit des deux, savoir $2ab$. De sorte que la somme $aa+2ab+bb$ est le quarré de $a+b$. Soit, par exemple, $a=10$ & $b=3$, c'est-à-dire qu'il soit question de trouver le quarré de 13, on aura $100+60+9$ ou 169.

308.

On trouvera facilement, par le secours de cette formule, les quarrés d'assez grands nombres, en les partageant en deux parties. Pour trouver, par exemple, le quarré de 57, on considérera que ce nombre est $=50+7$; d'où l'on conclut que son quarré est $=2500+700+49=3249$.

309.

On voit aussi par-là que le quarré de $a+1$ sera $aa+2a+1$: or puisque le quarré de

de a eſt aa, on trouve donc le quarré de $a+1$ en ajoutant à celui-là $2a+1$; & il faut remarquer que ce $2a+1$ eſt la ſomme des deux racines a & $a+1$.

Ainſi comme le quarré de 10 eſt 100, celui de 11 ſera $100+21$. Le quarré de 57 étant 3249, celui de 58 eſt $3249+115 = 3364$. Le quarré de $59 = 3364+117 = 3481$; le quarré de $60 = 3481+119 = 3600$, &c.

310.

Le quarré d'une quantité complexe, comme $a+b$, s'indique de cette façon : $(a+b)^2$. On a donc $(a+b)^2 = aa+2ab+bb$, d'où l'on déduit les équations ſuivantes :

$(a+1)^2 = aa+2a+1$; $(a+2)^2 = aa+4a+4$; $(a+3)^2 = aa+6a+9$; $(a+4)^2 = aa+8a+16$; &c.

311.

Si la racine eſt $a-b$, le quarré en eſt $aa-2ab+bb$, qui renferme par conſéquent

aussi le quarré des deux termes, mais en sorte qu'il faut en ôter le double du produit de ces deux termes.

Soit, par exemple, $a=10$ & $b=1$, le quarré de 9 se trouvera $=100-20+1=81$.

312.

Puisque nous avons l'équation $(a-b)^2=aa-2ab+bb$, nous aurons $(a-1)^2=aa-2a+1$. Le quarré de $a-1$ se trouve donc en soustrayant de aa la somme des deux racines a & $a-1$, savoir $2a-1$. Soit, par exemple, $a=50$, on a $aa=2500$ & $a-1=49$; donc $49^2=2500-99=2401$.

313.

Ce que nous avons dit peut aussi se confirmer & s'éclaircir par des fractions. Car si l'on prend pour racine $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ (ce qui fait 1) le quarré sera:

$$\frac{9}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{25}{25},$$ c'est-à-dire 1.

De plus le quarré de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (ou de $\frac{1}{6}$) sera $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

314.

Lorſque la racine eſt d'un plus grand nombre de termes, la méthode de déterminer le quarré eſt la même. Voici, par exemple, comment on trouve le quarré de $a+b+c$:

$$\begin{array}{llllll} a+b & +c & & & & \\ a+b & +c & & & & \\ \hline aa+ab & +ac & & +bc & & \\ +ab & +ac & +bb & +bc & +cc & \\ \hline aa+2ab & +2ac & +bb & +2bc & +cc; & \end{array}$$

on voit qu'il renferme d'abord le quarré de chaque terme de la racine, & outre cela les doubles produits de ces termes multipliés deux à deux.

315.

Pour éclaircir ceci par un exemple, partageons le nombre 256 en trois parties,

$200+50+6$; ſon quarré ſera donc composé des parties ſuivantes :

40000	256
2500	256
36	1536
20000	1280
2400	512
600	65536

65536, ce qui eſt évidemment égal au produit 256.256.

316.

Quand quelques termes de la racine ſont négatifs, le quarré ſe trouve encore par la même regle ; mais il faut faire attention quels ſignes on doit donner aux doubles produits. Ainſi le quarré de $a-b-c$ étant $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$, ſi l'on repréſentoit donc le nombre 256 par $300-40-4$, on auroit

Parties positives.	*Parties négatives.*
+90000	−24000
1600	2400
320	−26400
16	
+91936	
−26400	
65536, quarré de 256 comme ci-dessus.	

CHAPITRE VII.

De l'extraction des Racines appliquée aux Quantités complexes.

317.

Si nous voulons donner une regle sûre pour cette opération, il nous faut considérer attentivement le quarré de la racine $a+b$, qui est $aa+2ab+bb$, afin de voir comment on peut réciproquement parvenir à trouver la racine d'un quarré donné. Faisons donc les réflexions qui suivent.

318.

D'abord comme le quarré $aa+2ab+bb$ eſt compoſé de pluſieurs termes, il eſt certain que la racine auſſi renfermera plus d'un terme ; & que ſi l'on écrit le quarré de maniere que les puiſſances d'une des lettres, comme de a, aillent toujours en diminuant, le premier terme ſera le quarré du premier terme de la racine. Et puiſque dans notre cas le premier terme du quarré eſt aa, il faut que le premier terme de la racine ſoit a.

319.

Ayant donc trouvé le premier terme de la racine, c'eſt-à-dire a, on conſidérera le reſte du quarré, ſavoir $2ab+bb$, pour voir ſi on pourra en tirer la ſeconde partie de la racine qui eſt b. Nous remarquerons ici que ce reſte $2ab+bb$ peut être repréſenté par ce produit-ci, $(2a+b)b$. Or ce reſte ayant donc deux facteurs, $2a+b$ & b, il

eſt clair qu'on trouvera ce dernier b, qui eſt la ſeconde partie de la racine, en diviſant le reſte $2ab+bb$ par $2a+b$.

320.

C'eſt donc le quotient de la diviſion du reſte ſuſdit par $2a+b$, qui eſt le ſecond terme cherché de la racine. Or remarquons dans cette diviſion que $2a$ eſt le double du premier terme a de cette racine, lequel eſt déjà déterminé. Ainſi, quoique le ſecond terme ſoit encore inconnu, & qu'il faille juſqu'à préſent laiſſer ſa place vide, nous pouvons néanmoins entreprendre la diviſion, puiſqu'on n'y regarde qu'au premier terme $2a$. Mais auſſi-tôt qu'on aura trouvé le quotient, qui eſt ici b, il faudra le mettre à la place vide, & rendre de cette façon la diviſion complete.

321.

Le calcul donc par lequel on trouve la racine du quarré $aa+2ab+bb$, peut ſe repréſenter de cette maniere :

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa + 2ab + bb \ (a + b \\
 & aa \\
\hline
2a + b & + 2ab + bb \\
 & + 2ab + bb \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

322.

On pourra de la même maniere trouver la racine quarrée d'autres formules composées, pourvu qu'elles soient des quarrés; les exemples suivans le feront voir :

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa + 6ab + 9bb \ (a + 3b \\
 & aa \\
\hline
2a + 3b & + 6ab + 9bb \\
 & + 6ab + 9bb \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4aa - 4ab + bb \ (2a - b \\
 & 4aa \\
\hline
4a - b & - 4ab + bb \\
 & - 4ab + bb \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
 & 9pp + 24pq + 16qq \;(3p + 4q \\
 & 9pp \\
\hline
6p + 4q & + 24pq + 16qq \\
 & + 24pq + 16qq \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
 & 25xx - 60x + 36 \;(5x - 6 \\
 & 25xx \\
\hline
10x - 6 & - 60x + 36 \\
 & - 60x + 36 \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

323.

Quand après la diviſion il reſte un réſidu, c'eſt ſigne que la racine eſt compoſée de plus de deux termes. Ce qu'on fait alors, c'eſt de regarder les deux termes déjà trouvés comme faiſant la premiere partie, & de tirer du réſidu la ſeconde partie, de la même maniere qu'on avoit trouvé le ſecond terme de la racine. Les exemples ſuivans rendront ce procédé plus clair.

$$aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \;(a + b - c$$
$$aa$$

$2a + b$	$+ 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc$
	$+ 2ab \qquad\qquad + bb$
$2a + 2b - c$	$- 2ac - 2bc + cc$
	$- 2ac - 2bc + cc$

$$a^4 + 2a^3 + 3aa + 2a + 1 \;(aa + a + 1$$
$$a^4$$

$2aa + a$	$+ 2a^3 + 3aa$
	$+ 2a^3 + aa$
$2aa + 2a + 1$	$+ 2aa + 2a + 1$
	$+ 2aa + 2a + 1.$

$$a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \;(aa - 2ab - 2bb$$
$$a^4$$

$2aa - 2ab$	$- 4a^3b + 8ab^3$
	$- 4a^3b + 4aabb$
$2aa - 4ab - 2bb$	$- 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$
	$- 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$

$$(a^3 - 3aab + 3abb - b^3)$$

$$\begin{array}{l|l}
 & a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & a^6 \\
\hline
2a^3 - 3aab & -6a^5b + 15a^4bb \\
 & -6a^5b + 9a^4bb \\
\hline
2a^3 - 6aab + 3abb & +6a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 \\
 & +6a^4bb - 18a^3b^3 + 9aab^4 \\
\hline
2a^3 - 6aab + 6abb - b^3 & -2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & -2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6 \\
\hline
 & 0.
\end{array}$$

324.

On déduit facilement de la regle que nous venons d'expoſer, la méthode qu'enſeignent les livres d'Arithmétique pour l'extraction de la racine quarrée. Voici quelques exemples en nombres :

```
   5'29|23        17'64|42        23'04|48
   4   |          16   |          16   |
43|129         82|164          88|704
  |129           |164            |704
   o.              o.              o.
```

```
    40'96|64           96'04|98
    36   |             81   |
124|496           188|1504
   |496              |1504
    o.                o.
```

```
   1'56'25|125           99'80'01|999
   1      |              81      |
22|56                 189|1880
  |44                    |1701
245|1225             1989|17901
   |1225                 |17901
    o.                     o.
```

325.

Mais lorſqu'après l'opération entiere il reſte un réſidu, c'eſt une marque que le nombre propoſé n'eſt pas un quarré, & par conſéquent qu'on ne peut pas en aſſigner la racine. On ſe ſert dans ces cas du ſigne radical que nous avons déjà employé plus haut; on écrit ce ſigne devant la formule, & on met la formule elle-même entre deux crochets, ou ſous un trait. C'eſt ainſi que la racine quarrée de $aa+bb$ s'indique par $\sqrt{(aa+bb)}$, ou par $\sqrt{\overline{aa+bb}}$; & que $\sqrt{(1-xx)}$, ou $\sqrt{\overline{1-xx}}$, exprime la racine quarrée de $1-xx$. On peut auſſi, au lieu de ce ſigne radical, faire uſage de l'expoſant rompu $\frac{1}{2}$, & indiquer, par exemple, la racine quarrée de $aa+bb$ par $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$, ou par $\overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}}$.

CHAPITRE VIII.

Du Calcul des Quantités irrationnelles.

326.

LORSQU'IL s'agit d'ajouter ensemble deux ou plusieurs formules irrationnelles, cela se fait, suivant la maniere prescrite plus haut, en écrivant de suite tous les termes chacun avec le signe qui lui est propre. Et ce qu'il faut remarquer quant aux façons d'abréger, c'est que, par exemple, au lieu de $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ on écrit $2\sqrt{a}$, & que $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ fait 0, ces deux termes se détruisant l'un l'autre. C'est ainsi que les formules $3+\sqrt{2}$ & $1+\sqrt{2}$ ajoutées ensemble, font $4+2\sqrt{2}$ ou $4+\sqrt{8}$; que la somme de $5+\sqrt{3}$ & de $4-\sqrt{3}$, est 9; & que celle de $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$, & de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, est $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

La soustraction se fait de même très-facilement, vu qu'on n'a besoin que d'ajouter ensemble les nombres proposés, en prenant le contraire des signes qui les affectent : l'exemple suivant le fera voir ; nous soustrairons le nombre inférieur du supérieur.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ \hline 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6}. \end{array}$$

328.

On se rappellera dans la multiplication que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{a}$ fait a ; & que si les nombres qui suivent le signe $\sqrt{}$ sont différens, comme a & b, on a $\sqrt{ab}$ pour le produit de $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{b}$. Il sera facile après cela de calculer les exemples qui suivent :

$$\begin{array}{l}
1+\sqrt{2}\\
\underline{1+\sqrt{2}}\\
1+\sqrt{2}\\
\underline{\quad+\sqrt{2}+2}\\
1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
4+2\sqrt{2}\\
\underline{2-\sqrt{2}}\\
8+4\sqrt{2}\\
\underline{\quad-4\sqrt{2}-4}\\
8-4\quad=4.
\end{array}$$

329.

Ce que nous avons dit regarde aussi les quantités imaginaires. On observera seulement encore que $\sqrt{-a}$ multiplié par $\sqrt{-a}$ fait $-a$.

S'il s'agissoit de trouver le cube de $-1+\sqrt{-3}$, on prendroit le quarré de ce nombre, & on multiplieroit ce quarré encore par le même nombre; voici l'opération :

$$\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3}\\
\underline{-1+\sqrt{-3}}\\
+1-\sqrt{-3}\\
\underline{\quad-\sqrt{-3}-3}\\
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}\\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-1+\sqrt{-3}}\\
\qquad\qquad\qquad\quad +2+2\sqrt{-3}\\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\quad-2\sqrt{-3}+6}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 2+6\;=8.
\end{array}$$

330.

Dans la division des quantités sourdes on n'a besoin que de mettre les quantités proposées en forme de fraction ; celle-ci peut ensuite se changer en une autre expression dont le dénominateur soit rationnel. Car si ce dénominateur est, par exemple, $a+\sqrt{b}$, & qu'on le multiplie de même que le numérateur par $a-\sqrt{b}$, le nouveau dénominateur sera $aa-b$, où il ne se trouve plus de signe radical. Supposons qu'on propose de diviser $3+2\sqrt{2}$ par $1+\sqrt{2}$, nous aurons d'abord $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Multipliant maintenant les deux termes de la fraction par $1-\sqrt{2}$, nous aurons pour le numérateur :

$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 ; \end{array}$$

& pour le dénominateur :

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1. \end{array}$$

Notre nouvelle fraction est donc $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$; & si nous multiplions encore les deux termes par -1, nous aurons pour le numérateur $+\sqrt{2}+1$, & pour le dénominateur $+1$. Or il est facile de se convaincre que $\sqrt{2}+1$ équivaut à la fraction proposée $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; car $\sqrt{2}+1$ étant multiplié par le diviseur $1+\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline \end{array}$$

on a $1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$.

Autre exemple : $8-5\sqrt{2}$ divisé par $3-2\sqrt{2}$ fait $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Multipliant ces deux termes de la fraction par $\overline{3+2\sqrt{2}}$, on a pour le numérateur

$$\begin{array}{l} 8-5\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2}; \end{array}$$

& pour le dénominateur

$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline 9-8=+1. \end{array}$$

Par conséquent le quotient seroit $4+\sqrt{2}$. En voici la preuve :

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ \hline 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

331.

C'est de la même maniere qu'on peut transformer de ces fractions en d'autres, dont le dénominateur soit rationnel. Si l'on a, par exemple, la fraction $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$, & que l'on en multiplie le numérateur & le dénominateur par $5-2\sqrt{6}$, on la transformera en celle-ci, $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

De même la fraction $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ prend cette forme, $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$. Et $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ devient $=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

On pourra de la même maniere faire disparoître peu à peu les radicaux du dé-

nominateur, quand il contient plusieurs termes. Soit proposée la fraction $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, on multipliera d'abord ces deux termes par $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; on aura $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$. Multipliant ensuite encore ce numérateur & ce dénominateur par $5+2\sqrt{6}$, on a $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CHAPITRE IX.

Des Cubes & de l'extraction des Racines cubiques.

333.

Pour trouver le cube d'une racine $a+b$, on ne fait que multiplier son quarré $aa+2ab+bb$ encore une fois par $a+b$,

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ \quad + aab+2abb+b^3 \\ \hline \end{array}$$

le cube sera $= a^3+3aab+3abb+b^3$

Il renferme donc les cubes des deux parties de la racine ; & outre cela encore $3aab + 3abb$, quantité qui équivaut à $(3ab).(a+b)$, c'eſt-à-dire, au triple du produit des deux parties a & b, multiplié par leur ſomme.

334.

Ainſi toutes les fois qu'une racine eſt compoſée de deux termes, il eſt facile d'en trouver le cube d'après cette regle. Par exemple, le nombre $5 = 3 + 2$; ſon cube eſt donc $27 + 8 + 18 . 5 = 125$.

Que $7 + 3 = 10$ ſoit la racine ; le cube ſera $343 + 27 + 63 . 10 = 1000$.

Pour trouver le cube de 36, on ſuppoſera la racine $36 = 30 + 6$, & on aura pour le cube cherché, $27000 + 216 + 540 . 36 = 46656$.

335.

Mais ſi c'eſt au contraire le cube qui eſt donné, ſavoir $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, & qu'il s'agiſſe d'en trouver la racine, on fera préalablement les remarques qui ſuivent.

D'abord si le cube est ordonné suivant les puissances d'une lettre, on reconnoît facilement par le premier terme a^3, le premier terme a de la racine, puisque le cube en est a^3; si l'on soustrait donc ce cube du cube proposé, on obtient le reste, $3aab + 3abb + b^3$, lequel doit fournir le second terme de la racine.

336.

Mais comme nous savons d'avance que ce second terme est $+b$, il s'agit principalement de voir comment il se déduit du reste susdit. Or ce reste peut être exprimé par deux facteurs, comme $(3aa + 3ab + bb).(b)$; si on le divise donc par $3aa + 3ab + bb$, c'est le moyen d'obtenir la seconde partie de la racine $+b$, qu'on demande.

337.

Mais comme ce second terme ne doit pas être supposé connu, le diviseur est inconnu pareillement; cependant nous avons

le premier terme de ce diviſeur, & cela ſuffit; car il eſt $3aa$, c'eſt-à-dire, le triple du quarré du premier terme déjà trouvé, & moyennant cela il n'eſt pas difficile de trouver auſſi l'autre partie b, & de compléter enſuite le diviſeur avant qu'on acheve la diviſion. Il faudra pour cet effet joindre à $3aa$ le triple du produit des deux termes ou $3ab$, & bb ou le quarré du ſecond terme de la racine.

338.

Appliquons ce que nous venons de dire à deux exemples pour d'autres cubes donnés.

I.) $a^3 + 12aa + 48a + 64$ $(a + 4$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^3 \\
\hline
3aa + 12a + 16 & + 12aa + 48a + 64 \\
 & + 12aa + 48a + 64 \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

$$(aa - 2a + 1)$$

II.) $$a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1$$

$$a^6$$

$$3a^4 - 6a^3 + 4aa \quad \Big| \; -6a^5 + 15a^4 - 20a^3$$

$$-6a^5 + 12a^4 - 8a^3$$

$$3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3a^2 - 6a + 1 \quad \Big| \; + 3a^4 - 12a^3 + 15aa - 6a + 1$$

$$+ 3a^4 - 12a^3 + 15aa - 6a + 1$$

$$0.$$

339.

L'explication que nous avons donnée fait le fondement de la regle ordinaire pour l'extraction des racines cubiques des nombres. Voici, par exemple, le plan de l'opération pour le nombre 2197 :

	2'197 (10+3=13
	1 000
300	1 197
90	
9	
399	1 197
	0.

Faisons encore le calcul de l'extraction de la racine cubique de 34965783 :

	34 965 783 (300+20+7
	27 000 000
270000	7 965 783
18000	
400	
288400	5 768 000
307200	2 197 783
6720	
49	
313969	2 197 783
	0.

CHAPITRE X.

Des Puissances plus hautes des Quantités complexes.

340.

Après les quarrés & les cubes viennent des puissances plus hautes, ou d'un plus grand nombre de degrés. On les indique par des exposans de la maniere que nous avons expliquée plus haut ; il faut seulement observer, quand la racine est complexe, de l'enfermer entre deux parenthefes. Ainsi $(a+b)^5$ signifie que $a+b$ est élevé au cinquieme degré, & $(a-b)^6$ indique la sixieme puissance de $a-b$. Nous ferons voir dans ce chapitre le développement de ces puissances.

341.

Soit donc $a+b$ la racine ou la premiere puissance, les puissances plus hautes se trouveront par la multiplication de la maniere qui suit :

$$
\begin{array}{llllll}
(a+b)^1 = & a+b & & & & \\
& a+b & & & & \\
\hline
& aa+ab & & & & \\
& \quad +ab & +bb & & & \\
\hline
(a+b)^2 = & aa+2ab & +bb. & & & \\
& a+b & & & & \\
\hline
& a^3+2aab+ & abb & & & \\
& \quad +aab+ & 2abb & +b^3 & & \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3+3aab+ & 3abb & +b^3 & & \\
& a+b & & & & \\
\hline
& a^4+3a^3b+ & 3aabb+ & ab^3 & & \\
& \quad +a^3b+ & 3aabb+ & 3ab^3 & +b^4. & \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4+4a^3b+ & 6aabb+ & 4ab^3 & +b^4 & \\
& a+b & & & & \\
\hline
& a^5+4a^4b+ & 6a^3bb+ & 4aab^3+ & ab^4 & \\
& \quad +a^4b+ & 4a^3bb+ & 6aab^3+ & 4ab^4 & \\
& & & & +b^5. & \\
\hline
\end{array}
$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$a+b$$

$$a^6 + 5a^5b + 10a^4bb + 10a^3b^3 + 5aab^4 + ab^5$$

$$+ a^5b + 5a^4bb + 10a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5ab^5 + b^6.$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15aab^4 + 6ab^5 + b^6, \text{ \&c.}$$

342.

On trouve de même les puiſſances de la racine $a-b$, & on va voir qu'elles ne different des précédentes, qu'en ce que les termes 2e, 4e, 6e, &c. ſont affectés du ſigne *moins* :

$$(a-b)^1 = a-b$$

$$a-b$$

$$aa-ab$$

$$-ab+bb.$$

$$(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$$
$$a - b$$
$$a^3 - 2aab + abb$$
$$- aab + 2abb - b^3.$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3aab + 3abb - b^3$$
$$a - b$$
$$a^4 - 3a^3b + 3aabb - ab^3$$
$$- a^3b + 3aabb - 3ab^3 + b^4.$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$$
$$a - b$$
$$a^5 - 4a^4b + 6a^3bb - 4aab^3 + ab^4$$
$$- a^4b + 4a^3bb - 6aab^3 + 4ab^4 - b^5.$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$a - b$$
$$a^6 - 5a^5b + 10a^4bb - 10a^3b^3 + 5aab^4 - ab^5$$
$$- a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3 + 10aab^4 - 5ab^5 + b^6.$$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3$
$+ 15aab^4 - 6ab^5 + b^6$, &c.

On voit ici que toutes les puissances impaires de b reçoivent le signe $-$, tandis que les puissances paires gardent le signe $+$. La raison en est évidente; car puisque dans la racine se trouve $-b$, les puissances de cette lettre monteront de cette maniere: $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, &c. & il est clair par-là que les puissances paires doivent être affectées du signe $+$, & les impaires du signe contraire $-$.

343.

Il se présente ici une question importante, c'est comment, sans continuer le calcul de la même maniere dans toutes les formes, on pourroit trouver toutes les puissances tant de $a+b$, que de $a-b$. Nous remarquerons avant toutes choses, que si on est en état d'assigner toutes les puissances de $a+b$, celles de $a-b$ sont toutes trouvées, puisqu'on n'a qu'à changer les signes des

termes pairs, c'eſt-à-dire du ſecond, du quatrieme, du ſixieme terme, &c. Le principal revient donc à établir une regle, d'après laquelle toute puiſſance de $a+b$, quelque haute qu'elle ſoit, puiſſe être déterminée ſans qu'il ſoit néceſſaire de faire le calcul pour toutes celles qui la précedent.

344.

Or obſervons que ſi dans les puiſſances déterminées ci-deſſus on fait abſtraction des nombres qui précedent chaque terme, & qu'on nomme les *coëfficiens*, il regne dans tous ces termes un ordre remarquable; d'abord on voit le premier terme a de la racine élevé à la puiſſance même qu'on demande; dans les termes ſuivans les puiſſances de a diminuent continuellement de l'unité, les puiſſances de b augmentent d'autant; de ſorte que la ſomme des expoſans de a & de b eſt toujours la même & égale au nombre du degré demandé, & à la fin ſe trouve le terme b ſeul élevé à

la même puiſſance. Si l'on demande donc la dixieme puiſſance de $a+b$, on eſt sûr que les termes dégagés des coëfficiens ſe ſuivront dans l'ordre que voici : a^{10}, $a^9 b$, $a^8 bb$, $a^7 b^3$, $a^6 b^4$, $a^5 b^5$, $a^4 b^6$, $a^3 b^7$, $a^2 b^8$, ab^9, b^{10}.

345.

Il reſte donc à faire voir comment on doit déterminer les coëfficiens qui appartiennent à ces termes, ou les nombres par leſquels il faut multiplier ces termes. Or quant au premier terme, ſon coëfficient eſt toujours l'unité ; & quant au ſecond, ſon coëfficient eſt conſtamment l'expoſant même de la puiſſance ; mais pour ce qui regarde les autres termes, il n'eſt pas ſi facile d'obſerver un ordre dans leurs coëfficiens. Cependant ſi l'on continue encore ces coëfficiens, on ne laiſſera pas d'appercevoir auſſi une loi, moyennant laquelle on pourra aller auſſi loin qu'on voudra. C'eſt ce que la table ſuivante fera voir.

I. puiff. coëfficiens 1, 1
II. ——— 1, 2, 1
III. ——— 1, 3, 3, 1
IV. ——— 1, 4, 6, 4, 1
V. ——— 1, 5, 10, 10, 5, 1
VI. —— 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
VII. — 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
VIII. — 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
IX. 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
X. 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1
&c.

On voit donc que la dixieme puiffance de $a+b$ fera:

$$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}.$$

346.

Il faut remarquer à l'égard de ces coëfficiens, que pour chaque puiffance leur fomme doit être égale au nombre 2 élevé à la même puiffance. Qu'on faffe $a=1$ & $b=1$, chaque terme, abftraction faite

du coëfficient, sera $=1$; par conséquent ce sera simplement la somme des coëfficiens qui indiquera la valeur de la puissance; cette somme dans l'exemple précédent est 1024, & en effet $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Il en est de même des autres puissances; on a pour la

I.^e $1+1=2=2^1$,
IIe $1+2+1=4=2^2$,
IIIe $1+3+3+1=8=2^3$,
IVe $1+4+6+4+1=16=2^4$,
V.^e $1+5+10+10+5+1=32=2^5$,
VIe $1+6+15+20+15+6+1=64 = 2^6$,
VIIe $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$, &c.

347.

Une autre remarque à faire au sujet de ces coëfficiens, c'est qu'ils croissent depuis le commencement jusqu'au milieu, & qu'ensuite ils décroissent dans le même ordre.

Dans les puissances paires le plus grand coëfficient est exactement au milieu ; mais dans les puissances impaires, on voit deux coëfficiens égaux & plus grands que les autres qui se trouvent au milieu, & qui appartiennent aux termes moyens.

Quant à l'ordre de ces coëfficiens, il mérite une attention particuliere ; car c'est dans cet ordre même qu'on trouve les moyens de les déterminer pour une puissance quelconque, sans passer par les précédentes. Nous allons en donner la méthode, en en réservant cependant la démonstration pour le chapitre suivant.

348.

Pour trouver les coëfficiens d'une puissance proposée, par exemple, la septieme, on écrira les fractions qui suivent l'une après l'autre :

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

On voit dans cet arrangement que les numérateurs commencent par l'exposant de

la puiſſance qu'on demande, & qu'ils diminuent ſucceſſivement de l'unité pendant que les dénominateurs ſe ſuivent dans l'ordre naturel des nombres, 1, 2, 3, 4, &c. Or le premier coëfficient étant toujours 1, la premiere fraction donne le ſecond coëfficient. Le produit des deux premieres fractions, multipliées l'une par l'autre, repréſente le troiſieme coëfficient. Le produit des trois premieres fractions repréſente le quatrieme coëfficient, & ainſi de ſuite.

Ainſi le premier coëfficient $= 1$; le ſecond $= \frac{7}{1} = 7$; le troiſieme $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 21$; le quatrieme $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$; le cinquieme $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} = 35$; le ſixieme $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} = 21$; le ſeptieme $= 21 \cdot \frac{2}{6} = 7$; le huitieme $= 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

349.

On a donc pour la ſeconde puiſſance les deux fractions $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$, d'où il s'enſuit que le premier coëfficient $= 1$; le ſecond $= \frac{2}{1} = 2$; & le troiſieme $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

La troisieme puissance fournit les fractions $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}$; donc le premier coëfficient $=1$; le second $=\frac{3}{1}=3$; le troisieme $=3.\frac{2}{2}=3$; le quatrieme $=\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}=1$.

On a pour la quatrieme puissance ces fractions-ci, $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$; par conséquent le premier coëfficient $=1$; le second $\frac{4}{1}=4$; le troisieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}=6$; le quatrieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}=4$, & le cinquieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}=1$.

350.

Cette regle nous procure donc évidemment l'avantage de n'avoir pas besoin de connoître les coëfficiens précédens, & de trouver au contraire sur le champ, pour une puissance quelconque, les coëfficiens qui lui sont propres.

Ainsi pour la dixieme puissance on écrira les fractions $\frac{10}{1}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$, moyennant quoi l'on trouve

le premier coëfficient $=1$,

le second $=\frac{10}{1}=10$,

le troisieme $= 10.\frac{9}{2} = 45$,
le quatrieme $= 45.\frac{8}{3} = 120$,
le cinquieme $= 120.\frac{7}{4} = 210$,
le sixieme $= 210.\frac{6}{5} = 252$,
le septieme $= 252.\frac{5}{6} = 210$,
le huitieme $= 210.\frac{4}{7} = 120$,
le neuvieme $= 120.\frac{3}{8} = 45$,
le dixieme $= 45.\frac{2}{9} = 10$,
le onzieme $= 10.\frac{1}{10} = 1$.

351.

On peut aussi écrire ces fractions telles qu'elles sont, sans en calculer la valeur, & il est facile de cette maniere d'écrire une puissance quelconque de $a+b$, quelque haute qu'elle soit. C'est ainsi que la centieme puissance de $a+b$ sera $(a+b)^{100}$ $= a^{100} + \frac{100}{1}.a^{99}b + \frac{100.99}{1.2}.a^{98}bb + \frac{100.99.98}{1.2.3}a^{97}b^3$ $+ \frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}a^{96}b^4 +$, &c. d'où il est aisé de conclure quelle sera la loi des termes suivans.

CHAPITRE XI.

De la permutation des Lettres, ſur laquelle ſe fonde la démonſtration de la Regle précédente.

352.

Si on remonte à l'origine des coëfficiens dont nous venons de nous occuper, on trouvera que chaque terme ſe préſente autant de fois qu'il eſt poſſible de tranſpoſer les lettres qui compoſent ce terme ; ou bien, pour nous exprimer d'une autre maniere, que le coëfficient de chaque terme eſt égal au nombre des permutations que ſouffrent les lettres dont ce terme eſt compoſé. Dans la ſeconde puiſſance, par exemple, le terme ab eſt pris deux fois, c'eſt-à-dire que ſon coëfficient eſt 2 ; & on peut en effet changer doublement l'ordre des lettres qui compoſent ce terme, puiſqu'on peut écrire ab & ba ; le terme aa au contraire ne ſe

préſente qu'une fois, parce que l'ordre des lettres ne peut ſubir aucun changement ou permutation. Dans la troiſieme puiſſance de $a+b$, le terme aab peut s'écrire de trois manieres différentes, aab, aba, baa; auſſi le coëfficient eſt-il 3. De même dans la quatrieme puiſſance le terme a^3b ou $aaab$, admet les quatre diſpoſitions différentes, $aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$; c'eſt pourquoi ſon coëfficient eſt 4. Le terme $aabb$ ſouffre ſix permutations, $aabb$, $abba$, $baba$, $abab$, $bbaa$, $baab$, & ſon coëfficient eſt 6. Il en eſt de même dans tous les cas.

353.

En effet ſi l'on conſidere que la quatrieme puiſſance, par exemple, d'une racine quelconque compoſée même de plus de deux termes, comme $(a+b+c+d)^4$, ſe trouve en multipliant ces quatre facteurs, I. $a+b+c+d$; II. $a+b+c+d$; III. $a+b+c+d$; IV. $a+b+c+d$; on peut voir aiſément que chaque lettre du premier facteur doit

ſe multiplier par chaque lettre du ſecond, enſuite par chaque lettre du troiſieme, & enfin encore par chaque lettre du quatrième.

Il faut donc non-ſeulement que chaque terme ſoit composé de quatre lettres, mais auſſi qu'il ſe préſente ou qu'il entre dans la ſomme autant de fois que ces lettres peuvent être diſpoſées différemment entr'elles, d'où provient enſuite ſon coëfficient.

354.

Il importe donc beaucoup ici de ſavoir de combien de manieres différentes un nombre donné de lettres peuvent être diſpoſées entr'elles. Et il faudra dans cette recherche faire attention ſur-tout ſi les lettres dont il s'agit ſont les mêmes ou diverſes. Quand elles ſont les mêmes, il ne peut y avoir de permutation, & c'eſt auſſi pourquoi les puiſſances ſimples, comme a^2, a^3, a^4, &c. ont toutes l'unité pour coëfficient.

355.

Nous ſuppoſerons d'abord toutes les lettres diverſes ; & en commençant par le cas le plus ſimple, de deux lettres ou *ab*, nous voyons que ce ſont évidemment deux tranſpoſitions qui peuvent avoir lieu, ſavoir *ab*, *ba*.

Si nous avons trois lettres, *abc*, à conſidérer, nous remarquons que chacune des trois pourroit prendre la premiere place, tandis que les deux autres admettroient deux permutations. Car ſi *a* eſt la premiere lettre, on a les deux diſpoſitions *abc*, *acb* ; ſi *b* eſt à la premiere place, on a les diſpoſitions *bac*, *bca* ; enfin ſi *c* occupe la premiere place, on a de même deux diſpoſitions, ſavoir *cab*, *cba*. Et par conſéquent le nombre total des diſpoſitions eſt $3.2=6$.

Si on a quatre lettres, *abcd*, chacune peut occuper la premiere place ; & dans chacun de ces cas les trois autres peuvent former ſix diſpoſitions différentes, comme

nous venons de voir. Le nombre total des permutations eſt donc 4.6=24=4.3.2.1.

Si on a cinq lettres, *abcde*, chacune des cinq pouvant également ſe trouver la premiere, & les quatre autres ſouffrir vingt-quatre permutations, il s'enſuit que le nombre total des permutations ſera 5.24=120 =5.4.3.2.1.

356.

Quelque grand par conſéquent que ſoit le nombre des lettres, on voit aſſez que, pourvu qu'elles ſoient toutes différentes, il eſt facile de déterminer le nombre de toutes les permutations, & qu'on pourra faire uſage de la table ſuivante :

Nombre des Lettres :	Nombre des Permutations :
I.	1 = 1.
II.	2.1 = 2.
III.	3.2.1 = 6.
IV.	4.3.2.1 = 24.
V.	5.4.3.2.1 = 120.
VI.	6.5.4.3.2.1 = 720.
VII.	7.6.5.4.3.2.1 = 5040.
VIII.	8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320.
IX.	9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880.
X.	10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800.

357.

Mais comme nous l'avons insinué, les nombres de cette table ne peuvent s'employer que dans les cas où toutes les lettres sont différentes; car si deux ou plusieurs d'entre elles sont semblables, le nombre des permutations devient beaucoup moindre; & si toutes les lettres sont les mêmes, on n'a qu'une seule disposition. Nous allons donc voir comment les nombres de la table doivent être diminués suivant le nombre des lettres semblables.

358.

Quand deux lettres ſont données, & que ces lettres ſont les mêmes, les deux diſpoſitions ſe réduiſent à une ſeule, & par conſéquent le nombre que nous avions trouvé ci-deſſus ſe réduit à la moitié, c'eſt-à-dire qu'il faut le diviſer par 2. Si on a trois lettres ſemblables, on voit ſix permutations ſe réduire à une ſeule; d'où il ſuit que les nombres de la table doivent être diviſés par $6 = 3.2.1$. Et par une raiſon ſemblable, ſi quatre lettres ſont les mêmes, il faudra diviſer les nombres trouvés par 24 ou par $4.3.2.1$, &c.

Il eſt donc facile maintenant de déterminer, par exemple, de combien de permutations les lettres *aaabbc* ſont ſuſceptibles. Elles ſont au nombre de ſix, & par conſéquent ſi elles étoient toutes différentes, elles admettroient $6.5.4.3.2.1$ permutations. Mais puiſque *a* ſe trouve trois fois dans ces lettres, il faudra diviſer ce nombre de permutations par $3.2.1$; & puiſque

b ſe rencontre deux fois, il faudra encore diviſer par 2.1; le nombre des permutations cherché ſera donc $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5.4.3 = 60$.

359.

Il nous ſera donc facile à préſent de déterminer les coëfficiens de tous les termes d'une puiſſance quelconque. Nous en donnerons un exemple ſur la ſeptieme puiſſance $(a+b)^7$.

Le premier terme eſt a^7, qui ne ſe rencontre qu'une fois; & comme tous les autres termes ont chacun ſept lettres, il s'enſuit que le nombre de toutes les permutations pour chaque terme ſeroit 7.6.5.4.3.2.1, ſi toutes les lettres étoient diſſemblables. Mais puiſque dans le ſecond terme $a^6 b$ on trouve ſix lettres ſemblables, il faudra diviſer ce produit-là par 6.5.4.3.2.1, d'où il ſuit que le coëfficient eſt $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{7}{1}$.

Dans le troiſieme terme $a^5 bb$, on trouve cinq fois la même lettre a, & deux fois la

même lettre b; il faut donc divifer ce nombre d'abord par 5.4.3.2.1, & enfuite encore par 2.1; d'où réfulte le coëfficient $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6}{1.2}$.

Le quatrieme terme $a^4 b^3$ contient quatre fois la lettre a, & trois fois la lettre b; par conféquent le nombre total des permutations de fept lettres, doit être divifé en premier lieu par 4.3.2.1, & en fecond lieu par 3.2.1, ou par 1.2.3, & le fecond coëfficient devient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

On trouvera de la même maniere $\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ pour le coëfficient du cinquieme terme, & ainfi des autres; au moyen de quoi la regle donnée plus haut fe trouve démontrée (*).

360.

(*) Souvent auffi on tire de la théorie des *Combinaifons* les regles qu'on vient de voir pour la détermination des coëfficiens des termes de la puiffance d'un binome; c'eft peut-être avec quelque avantage, parce que tout fe rapporte alors à une feule formule.

Pour indiquer d'abord en paffant la différence qui eft entre les permutations & les combinaifons, remarquons que dans celles-là on demande de combien de manieres différentes, par exemple, les lettres qui compofent une certaine

360.

Ces conſidérations nous conduiſent encore plus loin, & nous montrent auſſi comment on doit trouver toutes les puiſſances

certaine formule peuvent changer de place, au lieu que dans les combinaiſons on demande combien de fois ces lettres peuvent être priſes ou multipliées enſemble une à une, deux à deux, trois à trois.

Qu'on ait, par exemple, la formule abc, on a vu que les lettres qui la compoſent ſouffrent ſix permutations, ſavoir abc, acb, bac, bca, cab, cba. Mais s'il s'agit des combinaiſons, je dis que ſi on prend ces trois lettres une à une, on a trois combinaiſons, ſavoir a, b & c. Que ſi on les prend deux à deux, on a les trois combinaiſons ab, ac & bc. Enfin, que ſi on prend ces trois lettres trois à trois, on a la ſeule combinaiſon abc.

Or de même qu'on prouve que 5 choſes différentes admettent $1.2.3.4.-5$ permutations différentes, & que ſi de ces 5 choſes il y en a r égales, le nombre des permutations eſt $\frac{1.2.3.4.-5}{1.2.3\ -r}$; on prouve auſſi que 5 choſes peuvent ſe prendre r à r, le nombre $\frac{5.\overline{5-1}.\overline{5-2}-\overline{5-r+1}}{1.2.3-r}$ de fois; ou que de ces 5 choſes on peut en prendre r d'autant de manieres différentes. Cela fait que ſi on nomme 5 l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever le

des racines qui sont composées de plus de deux termes (*). Nous en ferons l'application à la troisieme puissance de $a+b+c$, dont les termes doivent être formés de

binome $a+b$, & r l'exposant de la lettre b dans un terme quelconque, c'est toujours cette formule $\frac{5.5-1.5-2 \cdots 5-r+1}{1.2.3 \cdots r}$ qui exprime le coëfficient de ce terme. Ainsi dans l'exemple de cet article 359 ou $5=7$, on a pour le troisieme terme a^5bb, l'exposant $r=2$, & par conséquent le coëfficient $=\frac{7.6}{1.2}$.

Pour le quatrieme terme on a $r=3$ & le coëfficient $=\frac{7.6.5}{1.2.3}$, & ainsi de suite. Ce sont, comme on voit, les mêmes résultats que par les permutations.

On a des traités complets & étendus sur la théorie des combinaisons, qu'on doit à Messieurs *Frenicle*, de *Monmort*, *Jacques Bernoulli*, &c. Ces deux derniers ont approfondi cette théorie, relativement à son grand usage, dans le calcul des probabilités, calcul qui mériteroit bien qu'on en eût un traité élémentaire en françois, non-seulement à cause des nombreuses applications qu'on en fait aujourd'hui, mais aussi parce qu'il exerce l'esprit plus que tout autre, & de la maniere la plus agréable.

(*) On nomme ces racines ou ces quantités composées de plus de deux termes, des *polynomes*, pour les distinguer des *binomes* ou des quantités complexes à deux termes.

toutes les combinaisons possibles de trois lettres, & où chaque terme doit avoir pour coëfficient, comme ci-dessus, le nombre de ses permutations.

La troisieme puissance de $(a+b+c)^3$ sera, sans passer par la multiplication, $a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3$.

Supposons $a=1$, $b=1$, $c=1$, le cube de $1+1+1$, ou de 3, sera
$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27$.
Ce résultat est juste & confirme la regle.

Si l'on avoit supposé $a=1$, $b=1$ & $c=-1$, on auroit trouvé pour le cube de $1+1-1$, c'est-à-dire de 1
$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1$.

CHAPITRE XII.

Du Développement des Puiſſances irrationnelles par des ſuites infinies.

361.

COMME nous avons fait voir de quelle maniere on doit trouver une puiſſance quelconque de la racine $a+b$; quelque grand que ſoit l'expoſant, nous ſommes en état d'exprimer généralement la puiſſance de $a+b$, dont l'expoſant ſeroit indéterminé. Il eſt évident que ſi on indique cet expoſant par n, on aura par la regle donnée plus haut (art. 348 & ſuiv.) :

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 +,$$ &c.

362.

Que ſi on demandoit la même puiſſance de la racine $a-b$, on ne feroit que changer

les ſignes du ſecond, quatrieme, ſixieme, &c. terme, & on auroit $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 -$, &c.

363.

Ces formules ſont d'une utilité inſigne ; car elles ſervent auſſi à exprimer toutes les eſpeces de radicaux. Nous avons fait voir que toutes les quantités irrationnelles peuvent ſe mettre ſous la forme de puiſſances dont les expoſans ſont rompus, & que $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, & $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, &c. on aura donc auſſi

$$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}; \ \sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$$

& $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$, &c.

C'eſt pourquoi, ſi l'on veut trouver la racine quarrée de $a+b$, on n'a beſoin que de ſubſtituer à l'expoſant n la fraction $\frac{1}{2}$ dans la formule générale de l'art. 361, & on aura d'abord pour les coëfficiens,

$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$; $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$; $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$; $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$; $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$; $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Enſuite $a^n = a^{\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{a}$ & $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$; $a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}$ &c. ou bien on pourra exprimer ces puiſſances de a de cette autre maniere : $a^n = \sqrt{a}$;

$$a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a};\ a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2};\ a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a^3};\ a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4},\ \&c.$$

364.

Cela poſé, la racine quarrée de $a+b$ pourra s'exprimer de la maniere qui ſuit:

$$\sqrt{(a+b)} =$$

$$\sqrt{a} + \tfrac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}bb\frac{\sqrt{a}}{aa} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3}$$

$$- \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}.\tfrac{5}{8}b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4},\ \&c.$$

365.

Si donc a eſt un nombre quarré, on pourra aſſigner la valeur de $\sqrt{a}$, & par

conféquent la racine quarrée de $a+b$ pourra être exprimée par une fuite infinie fans aucun figne radical.

Soit, par exemple, $a=cc$, on aura $\sqrt{a}=c$; donc $\sqrt{(cc+b)}=c+\frac{1}{2}.\frac{b}{c}-\frac{1}{8}\frac{bb}{c^3}+\frac{1}{16}.\frac{b^3}{c^5}-\frac{5}{128}.\frac{b^4}{c^7}$, &c.

On voit par-là qu'il n'eft aucun nombre dont on ne puiffe extraire la racine quarrée de la même maniere; puifque tout nombre peut fe décompofer en deux parties, dont l'une foit un quarré repréfenté par cc. Si on cherche, par exemple, la racine quarrée de 6, on fera $6=4+2$, par conféquent $cc=4$, $c=2$, $b=2$; d'où réfulte $\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024}$ &c. Si on vouloit ne prendre que les deux premiers termes de cette fuite, on auroit $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, dont le quarré $\frac{25}{4}$ eft de $\frac{1}{4}$ plus grand que 6; mais fi on confidere trois termes on a $2\frac{7}{16}=\frac{39}{16}$, dont le quarré $\frac{1521}{256}$ eft encore de $\frac{15}{256}$ trop petit.

366.

Puisque dans cet exemple $\frac{5}{2}$ approche beaucoup déjà de la valeur vraie de $\sqrt{6}$, nous prendrons pour 6 la quantité équivalente $\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$ Ainsi $cc=\frac{25}{4}$; $c=\frac{5}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$; & calculant seulement les deux premiers termes, nous trouvons $\sqrt{6}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}$ $=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20}$; le quarré de cette fraction étant $\frac{2401}{400}$, ne surpasse que de $\frac{1}{400}$ le quarré de $\sqrt{6}$.

Faisant maintenant $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$, de sorte que $c=\frac{49}{20}$ & $b=-\frac{1}{400}$; & ne prenant encore que les deux premiers termes, on a $\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}$ $-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$, dont le quarré est $=\frac{23049601}{3841600}$. Or 6 réduit au même dénominateur est $=\frac{23049600}{3841600}$; l'erreur n'est donc plus que de $\frac{1}{3841600}$.

367.

On pourra de la même maniere exprimer la racine cubique de $a+b$ par une ſérie infinie. Car puiſque $\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{3}}$, on aura dans la formule générale $n=\frac{1}{3}$; & pour les coëfficiens, $\frac{n}{1}=\frac{1}{3}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{1}{3}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{9}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{2}{3}$; $\frac{n-4}{5}=-\frac{11}{15}$, &c. & quant aux puiſſances de a, on aura $a^n=\sqrt[3]{a}$;

$$a^{n-1}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a};\ a^{n-2}=\frac{\sqrt[3]{a}}{aa};\ a^{n-3}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}\ \&c.$$

donc $\sqrt[3]{(a+b)}=\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3}.b\frac{\sqrt[3]{a}}{a}-\frac{1}{9}.bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$ $+\frac{5}{81}.b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}-\frac{10}{243}.b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$, &c.

368.

Si donc a eſt un cube, ou $a=c^3$, on a $\sqrt[3]{a}=c$, & les ſignes radicaux s'évanouiront; car on aura

$$\sqrt[3]{(c^3+b)}=c+\frac{1}{3}.\frac{b}{cc}-\frac{1}{9}.\frac{bb}{c^5}+\frac{5}{81}.\frac{b^3}{c^8}-\frac{10}{243}.\frac{b^4}{c^{11}}$$

$+$, &c.

369.

Voilà donc une formule, au moyen de laquelle on pourra trouver *par approximation*, comme on dit, la racine cubique d'un nombre quelconque; puiſque tout nombre peut ſe partager en deux parties, comme c^3+b, dont la premiere ſoit un cube.

On voudroit, par exemple, déterminer la racine cubique de 2; on repréſentera 2 par $1+1$, de façon que $c=1$ & $b=1$, par conſéquent $\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}$, &c. les deux premiers termes de cette ſuite ſont $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, dont le cube $\frac{64}{27}$ eſt trop grand de $\frac{10}{27}$. Qu'on faſſe donc $2=\frac{64}{27}-\frac{10}{27}$, on aura $c=\frac{4}{3}$ & $b=-\frac{10}{27}$, & par conſéquent $\sqrt[3]{2}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{-10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Ces deux termes ſont $\frac{4}{3}-\frac{5}{72}=\frac{91}{72}$, dont le cube eſt $\frac{753571}{373248}$. Or $2=\frac{746496}{373248}$, ainſi l'erreur eſt $\frac{7075}{373248}$. Et voilà

comment on pourra approcher toujours davantage, & d'autant plus vîte qu'on prendra un plus grand nombre de termes (*).

(*) M. *Halley* a donné dans les *Tranſactions philoſophiques* de 1694 une méthode très-belle & très-générale pour extraire par approximation les racines d'un degré quelconque. Monſieur *Halley* prouve qu'on a généralement $\sqrt[m]{a^m \pm b} = \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}}$. Ceux qui ne feront pas à portée de conſulter les *Tranſactions philoſophiques*, trouveront des éclairciſſemens ſur la formation & ſur les uſages de cette formule, dans la nouvelle édition des *Leçons élémentaires de Mathématiques* de M. l'Abbé *de la Caille*, publiées par M. l'Abbé *Marie*.

CHAPITRE XIII.

Du Développement des Puissances négatives.

370.

Nous avons fait voir plus haut qu'on peut exprimer $\frac{1}{a}$ par a^{-1}; on peut donc de même exprimer $\frac{1}{a+b}$ par $(a+b)^{-1}$; de sorte que la fraction $\frac{1}{a+b}$ peut être regardée comme une puissance de $a+b$, c'est-à-dire celle dont l'exposant est -1; & il s'ensuit de là que la série trouvée ci-dessus pour la valeur de $(a+b)^n$ s'étend aussi à ce cas.

371.

Puis donc que $\frac{1}{a+b}$ signifie autant que $(a+b)^{-1}$, supposons dans la formule citée $n=-1$; nous aurons d'abord pour les coëfficiens : $\frac{n}{1}=-1$; $\frac{n-1}{2}=-1$; $\frac{n-2}{3}=-1$; $\frac{n-3}{4}=-1$, &c.; & ensuite pour les puissances de a:

$a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{n-1} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{n-2} = \frac{1}{a^3}$;

$a^{n-3} = \frac{1}{a^4}$, &c.; ainsi $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ &c. & c'est la même suite que nous avons déjà trouvée plus haut par la division.

372.

De plus $\frac{1}{(a+b)^2}$ étant autant que $(a+b)^{-2}$, réduisons aussi cette formule en une suite infinie. Il faudra pour cet effet supposer $n = -2$, & nous aurons pour les coëfficiens d'abord $\frac{n}{1} = -\frac{2}{1}$; $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$; $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$; $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$, &c. Et pour les puissances de a : $a^n = \frac{1}{a^2}$; $a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$; $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$; $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$, &c. Nous obtenons donc $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{bb}{a^4} - \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^3}{a^4} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^5}$, &c.

Or $\frac{2}{1} = 2$; $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$; $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$; $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$, &c. Par conféquent nous avons $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8}$, &c.

373.

Continuons & fuppofons $n = -3$, nous aurons une fuite qui exprimera la valeur de $\frac{1}{(a+b)^3}$ ou de $(a+b)^{-3}$. Les coëfficiens feront : $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$; $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$; $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$; $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$, &c. & les puiffances de a deviennent : $a^n = \frac{1}{a^3}$; $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$; $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ &c. ce qui nous donne : $\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7}$ &c. $= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}}$ &c.

Faisons encore $n=-4$, nous aurons pour les coëfficiens : $\frac{n}{1}=-\frac{4}{1}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{5}{2}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{6}{3}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{7}{4}$ &c. & pour les puissances : $a^n=\frac{1}{a^4}$; $a^{n-1}=\frac{1}{a^5}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^6}$; $a^{n-3}=\frac{1}{a^7}$; $a^{n-4}=\frac{1}{a^8}$, &c. d'où l'on tire :

$$\frac{1}{(a+b)^4}=\frac{1}{a^4}-\frac{4}{1}.\frac{b}{a^5}+\frac{4}{1}.\frac{5}{2}.\frac{b^2}{a^6}-\frac{4}{1}.\frac{5}{2}.\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7}$$
$$+\frac{4}{1}.\frac{5}{2}.\frac{6}{3}.\frac{7}{4}.\frac{b^4}{a^8}\text{\&c.}=\frac{1}{a^4}-4\frac{b}{a^5}+10\frac{b^2}{a^6}$$
$$-20\frac{b^3}{a^7}+35\frac{b^4}{a^8}-56\frac{b^5}{a^9}+,\ \text{\&c.}$$

374.

Les différens cas que nous venons de considérer nous mettent en état maintenant de conclure avec certitude qu'on aura généralement pour une telle puissance négative quelconque de $a+b$:

$$\frac{1}{(a+b)^m}=\frac{1}{a^m}-\frac{m}{1}.\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{b^2}{a^{m+2}}-\frac{m}{1}$$
$$.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}.\frac{b^3}{a^{m+3}}+,\ \text{\&c.}$$

Et on peut, moyennant cette formule, transformer toutes ces eſpeces de fractions en ſuites infinies, en ſubſtituant même à m des fractions, afin d'exprimer des formules irrationnelles.

375.

Pour éclaircir encore davantage cette matiere, nous joindrons ici les conſidérations qui ſuivent.

Nous avons trouvé :

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}+,$$
&c.

Si nous multiplions donc cette ſuite par $a+b$, il faut que le produit ſoit $=1$: & cela ſe trouve vrai, comme on va le voir, en effectuant la multiplication :

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}+\&c.$$
$$a+b$$

$$1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^5}{a^5}+\ \&c.$$

+

$$+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}-\text{\&c.}$$

1

376.

Nous avons trouvé auſſi $\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}$ &c. Si on multiplie donc cette ſuite par $(a+b)^2$, il faut que le produit ſoit pareillement $=1$. Or $(a+b)^2=aa+2ab+bb$, voici donc le plan de l'opération:

$$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}+\text{\&c.}$$

$$aa+2ab+bb$$

$$1-\frac{2b}{a}+\frac{3bb}{aa}-\frac{4b^3}{a^3}+\frac{5b^4}{a^4}-\frac{6b^5}{a^5}+\text{\&c.}$$

$$+\frac{2b}{a}-\frac{4bb}{aa}+\frac{6b^3}{a^3}-\frac{8b^4}{a^4}+\frac{10b^5}{a^5}-\text{\&c.}$$

$$+\frac{bb}{aa}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{3b^4}{a^4}-\frac{4b^5}{a^5}+\text{\&c.}$$

1 produit que la nature de la choſe exigeoit.

377.

Que si l'on ne multiplioit que par $a+b$ la série trouvée pour la valeur de $\frac{1}{(a+b)^2}$, il faudroit que le produit répondît à la fraction $\frac{1}{a+b}$, ou fût égal à la série trouvée ci-dessus, $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}$ &c. & c'est ce que la multiplication effective confirmera.

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ \&c.} \\
a+b \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{2b}{aa} + \frac{3bb}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ \&c.} \\
\quad + \frac{b}{aa} - \frac{2bb}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ \&c.} \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \text{\&c.}
\end{array}
$$

SECTION TROISIEME.

Des Rapports & des Proportions.

CHAPITRE PREMIER.

Du Rapport arithmétique, ou de la différence entre deux Nombres.

378.

DEUX grandeurs ſont ou égales l'une à l'autre, ou elles ne le ſont pas. Dans ce dernier cas où l'une eſt plus grande que l'autre, on peut enviſager leur inégalité ſous deux points de vue différens; on peut demander *de combien* une des quantités eſt plus grande que l'autre? On peut auſſi demander *combien de fois* l'une eſt plus grande que l'autre? Les déterminations qui forment les réponſes à ces deux queſtions, ſe

nomment toutes deux des rapports ou des raiſons ; on a coutume de nommer la premiere *rapport arithmétique*, & la ſeconde *rapport géométrique*, ſans cependant que ces dénominations ayent aucune liaiſon avec la choſe même ; c'eſt arbitrairement qu'elles ont été adoptées.

379.

On s'imagine bien ſans doute qu'il faut que les grandeurs dont nous parlons ſoient d'une même eſpece, puiſque ſans cela on ne pourroit rien déterminer au ſujet de leur égalité ou de leur inégalité. Il ſeroit abſurde, par exemple, de demander ſi deux livres & trois aunes ſont des quantités égales ? C'eſt pourquoi dans ce qui va ſuivre il ne peut être queſtion que de quantités d'une même eſpece ; & comme elles peuvent toujours être aſſignées en nombres, ce n'eſt auſſi, comme nous en avons averti dès le commencement, que des nombres dont nous traiterons.

380.

Quand on demande donc de deux nombres donnés, de combien l'un eſt plus grand que l'autre, la réponſe à cette queſtion détermine le rapport arithmétique de ces deux nombres. Or puiſque cette détermination ſe fait en indiquant la différence des deux nombres, il s'enſuit qu'un rapport arithmétique n'eſt autre choſe que la différence entre deux nombres. Et comme ce mot de *différence* nous paroît une expreſſion plus propre, nous réſerverons celles de *rapport* ou *raiſon*, pour exprimer les rapports géométriques.

381.

La différence entre deux nombres ſe trouve, comme on ſait, en ſouſtrayant le plus petit du plus grand; rien de plus facile par conſéquent que de réſoudre la queſtion, de combien l'un eſt plus grand que l'autre. Et dans le cas donc où les nombres ſont

égaux, la différence étant nulle ou zéro, ſi l'on demande de combien un des nombres eſt plus grand que l'autre, on répondra, de rien. Par exemple, 6 étant $=2.3$, la différence entre 6 & 2.3 eſt 0.

382.

Mais lorſque les deux nombres ne ſont pas égaux, comme 5 & 3, & qu'on demande de combien 5 eſt plus grand que 3, la réponſe eſt, de 2; & elle ſe détermine en ſouſtrayant 3 de 5. De même 15 eſt plus grand que 5, de 10; & 20 ſurpaſſe 8 de 12.

383.

Nous avons donc trois choſes à conſidérer ici: 1.° le plus grand des deux nombres; 2.° le plus petit, & 3.° la différence. Et ces trois quantités ont entr'elles une liaiſon telle, que deux des trois étant données, elles déterminent toujours la troiſieme.

Soit le plus grand nombre $=a$, le plus petit $=b$, & la différence $=d$: on trou-

vera la différence d en ſouſtrayant b de a, de façon que $d=a-b$; d'où l'on voit comment a & b étant donnés on peut trouver d.

384.

Mais ſi c'eſt la différence qui eſt donnée avec le plus petit des deux nombres, ou b, ce ſera le nombre plus grand qu'on pourra déterminer, ſavoir, en ajoutant enſemble la différence & le nombre plus petit, ce qui donne $a=b+d$. Car ſi on ôte de $b+d$ le moindre nombre b, il reſte d, qui eſt la différence connue. Soit le moindre nombre $=12$, la différence $=8$, le nombre plus grand ſera $=20$.

385.

Enfin ſi outre la différence d le plus grand nombre a eſt donné, on trouve l'autre nombre b en ſouſtrayant la différence du plus grand nombre, ce qui fait qu'on a $b=a-d$. Car ſi j'ôte le nombre $a-d$ du nombre

plus grand a, il reste d, qui est la différence donnée.

386.

La liaison entre ces trois nombres a, b, d est donc telle qu'on en tire les trois déterminations suivantes : 1.° $d = a - b$; 2.° $a = b + d$; 3.° $b = a - d$; & si une de ces trois comparaisons est juste, il faut nécessairement que les deux autres le soient aussi. Donc en général si $z = x + y$, il faut absolument que $y = z - x$ & $x = z - y$.

387.

Il est à remarquer au sujet de ces raisons arithmétiques, que si l'on ajoute aux deux nombres a & b un nombre c pris à volonté, ou qu'on l'en soustraie, la différence reste la même. C'est-à-dire que si d est la différence entre a & b, ce nombre d sera aussi la différence entre $a + c$ & $b + c$, & entre $a - c$ & $b - c$. Par exemple, la différence entre les nombres 20 & 12 étant 8,

cette différence reſtera la même, quelque nombre qu'on ajoute à ces nombres 20 & 12, & quelque nombre qu'on en retranche.

388.

La preuve en eſt évidente. Car ſi $a-b=d$, on a auſſi $(a+c)-(b+c)=d$; & de même $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Si on double les deux nombres a & b, la différence deviendra double auſſi. Ainſi quand $a-b=d$, on aura $2a-2b=2d$; & en général $na-nb=nd$, quelque nombre qu'on prenne pour n.

CHAPITRE II.

Des Proportions arithmétiques.

390.

LORSQUE deux rapports arithmétiques ſont égaux, cette égalité ſe nomme une *proportion arithmétique.*

Ainſi quand $a-b=d$ & $p-q=d$, de ſorte que la différence eſt la même entre les nombres p & q, qu'entre les nombres a & b, on dit que ces quatre nombres forment une proportion arithmétique ; on l'écrit $a-b=p-q$, & on indique clairement par-là que la différence entre a & b eſt égale à la différence entre p & q.

391.

Une proportion arithmétique conſiſte donc dans quatre termes, qui doivent être tels, que ſi on ſouſtrait le ſecond du premier, le reſte ſe trouve le même qu'en

foustrayant le quatrieme du troisieme. Ainsi ces quatre nombres 12, 7, 9, 4 forment une proportion arithmétique, parce que $12-7=9-4$ (*).

392.

Quand on a une proportion arithmétique comme $a-b=p-q$, on peut faire changer de place au second & au troisieme terme, en écrivant $a-p=b-q$; cette égalité ne sera pas moins vraie. Car puisque $a-b=p-q$, qu'on ajoute d'abord b des deux côtés, on aura $a=b+p-q$. Qu'on soustraie ensuite p des deux côtés, on aura $a-p=b-q$.

Ainsi, comme $12-7=9-4$, on a aussi $12-9=7-4$.

393.

On peut aussi dans toute proportion arithmétique, mettre le second terme à la place

(*) Pour désigner que ces nombres sont une telle proportion, quelques-uns les écrivent ainsi : 12.7:9.4.

du premier, si on fait en même temps une transposition pareille du troisieme & du quatrieme. C'est-à-dire que si $a-b=p-q$, on aura aussi $b-a=q-p$. Car $b-a$ est la négative de $a-b$, & de même $q-p$ est la négative de $p-q$. Ainsi, puisque $12-7=9-4$, on a pareillement $7-12=4-9$.

394.

Mais la propriété principale d'une proportion arithmétique quelconque est celle-ci : que la somme du second & du troisieme terme est égale constamment à la somme du premier & du quatrieme terme. Cette propriété, à laquelle il faut bien faire attention, s'exprime aussi de cette façon : la somme des *moyens* est égale à la somme des *extrêmes*. Ainsi, comme $12-7=9-4$, on a $7+9=12+4$; & en effet la somme est 16 de part & d'autre.

395.

Soit, pour démontrer cette propriété principale, $a-b=p-q$; si on ajoute de part & d'autre $b+q$, on a $a+q=b+p$; c'est-à-dire que la somme du premier & du quatrieme terme est égale à la somme du second & du troisieme. Et réciproquement, si quatre nombres, a, b, p, q, sont tels que la somme du second & du troisieme est égale à la somme du premier & du quatrieme, c'est-à-dire que $b+p=a+q$, on en conclût, sans pouvoir se tromper, que ces nombres sont en proportion arithmétique, & que $a-b=p-q$. En effet, puisque $a+q=b+p$, si on soustrait de l'un & de l'autre côté $b+q$, on obtient $a-b=p-q$.

Ainsi les nombres 18, 13, 15, 10 étant tels que la somme des moyens $13+15=28$ est égale à la somme des extrêmes $18+10=28$, on est certain qu'ils forment aussi une proportion arithmétique, & par conséquent que $18-13=15-10$.

396.

Il eſt facile au moyen de la propriété dont nous parlons, de réſoudre la queſtion qui ſuit : les trois premiers termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrieme? Soient a, b, p ces trois premiers termes, & exprimons par q le quatrieme qu'il s'agit de déterminer, nous aurons $a+q=b+p$; ſouſtrayant enſuite a de part & d'autre, nous obtenons $q=b+p-a$. Ainſi le quatrieme terme ſe trouve en ajoutant enſemble le ſecond & le troiſieme, & en ſouſtrayant de cette ſomme le premier. Suppoſez, par exemple, que 19, 28, 13 ſoient les trois premiers termes donnés, la ſomme du ſecond & du troiſieme eſt$=41$; ôtez-en le premier qui eſt 19, il reſte 22 pour le quatrieme terme cherché, & la proportion arithmétique ſera indiquée par $19-28=13-22$, ou par $28-19=22-13$, ou par $28-22=19-13$.

397.

Lorſque dans une proportion arithmétique le ſecond terme eſt égal au troiſieme, on n'a que trois nombres, mais dont la propriété eſt telle que le premier moins le ſecond fait autant que lè ſecond moins le troiſieme, ou bien que la différence entre le premier & le ſecond nombre eſt égale à la différence entre le ſecond & le troiſieme. Les trois nombres 19, 15, 11 ſont de cette eſpece, puiſque $19-15=15-11$.

398.

On dit de trois nombres tels que ceux-là, qu'ils forment une proportion arithmétique continue, & on le déſigne quelquefois par le ſigne $\div$, en écrivant, par exemple, $\div 19, 15, 11$. On nomme auſſi ces ſortes de proportions des *progreſſions arithmétiques*, ſur-tout s'il y a un plus grand nombre de termes qui ſe ſuivent conformément à la même loi.

Une progreſſion arithmétique peut être ou *croiſſante* ou *décroiſſante*. La premiere dénomination lui convient quand les termes vont en augmentant, c'eſt-à-dire, quand le ſecond ſurpaſſe le premier, & que le troiſieme ſurpaſſe d'autant le ſecond, comme ces nombres-ci, 4, 7, 10. La progreſſion décroiſſante eſt celle où les termes vont toujours en diminuant de la même quantité, tels ſont les nombres 9, 5, 1.

399.

Suppoſons que les nombres a, b, c ſoient en progreſſion arithmétique, il faut que $a-b=b-c$, d'où il ſuit, à cauſe de l'égalité de la ſomme des extrêmes & de celle des moyens, que $2b=a+c$; & ſi on ſouſtrait a de part & d'autre, on a $c=2b-a$.

400.

Ainſi quand les deux premiers termes, a, b, d'une progreſſion arithmétique ſont donnés, on trouve le troiſieme, en ôtant le

le premier du double du ſecond. Soient 1 & 3 les deux premiers termes d'une progreſſion arithmétique, le troiſieme ſera $= 2 . 3 - 1 = 5$. Et ces trois nombres 1, 3, 5 donnent la proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

On peut, en ſuivant la même voie, aller plus loin & continuer la progreſſion arithmétique auſſi loin qu'on voudra : on n'a qu'à chercher le quatrieme terme moyennant le ſecond & le troiſieme, de la même maniere qu'on a déterminé le troiſieme au moyen du premier & du ſecond, & ainſi de ſuite. Soit a le premier terme, & b le ſecond, le troiſieme ſera $= 2b - a$, le quatrieme $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$, le cinquieme $= 6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$, le ſixieme $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$, le ſeptieme $= 10b - 8b - 4b + 3a = 6b - 5a$.

CHAPITRE III.

402.

Des Progressions Arithmétiques.

NOUS avons insinué qu'on nomme *progression arithmétique* une suite de nombres composée d'autant de termes qu'on veut, lesquels croissent ou décroissent toujours d'une même quantité.

Ainsi les nombres naturels écrits par ordre, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c. forment une progression arithmétique, parce qu'ils augmentent toujours de l'unité; & la suite 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, &c. est aussi une telle progression, puisque ces nombres diminuent constamment de 3.

403.

Le nombre ou la quantité dont les termes d'une progression arithmétique deviennent

plus grands ou plus petits, se nomme la *différence*. Ainsi quand le premier terme est donné avec la différence, on peut continuer la progression arithmétique aussi loin qu'on voudra. Soit, par exemple, le premier terme $= 2$, & la différence $= 3$, on aura la progression croissante qui suit: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, &c. où chaque terme se trouve en ajoutant la différence au terme précédent.

404.

On a coutume d'écrire les nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. au-dessus des termes d'une telle progression arithmétique, afin qu'on reconnoisse d'abord le rang où un terme quelconque se trouve être dans la progression. On peut nommer ces nombres écrits au-dessus des termes, des *indices*; ainsi l'exemple cité s'écrira comme il suit:

Indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prog. arithm.	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29

&c. où l'on voit que 29 eſt le dixieme terme.

405.

Soit a le premier terme, & d la différence, la progreſſion arithmétique continuera dans cet ordre:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, \&c. \end{array}$$

par lequel on voit qu'il eſt facile de trouver auſſi-tôt un terme quelconque de la progreſſion, ſans qu'il ſoit néceſſaire de connoître tous les termes précédens; & uniquement par le moyen du premier terme a & de la différence d. Par exemple, le dixieme terme ſera $=a+9d$, le centieme terme $=a+99d$, & en général le terme n quelconque ſera $=a+(n-1)d$.

406.

Lorſqu'on s'arrête en quelque endroit de la progreſſion, il eſt eſſentiel de faire attention au premier & au dernier terme,

& l'indice du dernier indiquera le nombre des termes. Si donc le premier terme $=a$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$, on a le dernier terme $=a+(n-1)d$, lequel ſe trouve par conſéquent en multipliant la différence par le nombre des termes moins un, & ajoutant à ce produit le premier terme.

Suppoſez, par exemple, une progreſſion arithmétique de cent termes, dont le premier $=4$, & que la différence ſoit $=3$, le dernier terme ſera $=99.3+4=301$.

407.

Lorſqu'on connoît le premier terme a & le dernier z, avec le nombre des termes $=n$, on peut trouver la différence d. Car puiſque le dernier terme $z=a+(n-1)d$, ſi on ſouſtrait de part & d'autre a, on obtient $z-a=(n-1)d$. Ainſi en ſouſtrayant le premier terme du dernier, on a le produit de la différence multipliée par le nombre des termes moins 1. On n'aura donc qu'à

diviser $z-a$ par $n-1$ pour obtenir la valeur cherchée de la différence d, qui sera $=\frac{z-a}{n-1}$. Ce résultat fournit cette regle : on soustrait le premier terme du dernier terme, & on divise le reste par le nombre des termes diminué de l'unité, le quotient est la différence; par le moyen de laquelle on est en état ensuite d'écrire toute la progression.

408.

Supposons, par exemple, une progression arithmétique de neuf termes, dont le premier soit $=2$, & le dernier $=26$, & qu'il s'agisse de trouver la différence. Il faudra donc soustraire le premier terme 2 du dernier 26 & diviser le reste, qui est 24, par $9-1$, c'est-à-dire par 8; le quotient 3 sera égal à la différence cherchée, & la progression entiere sera :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26.

Supposons, pour donner un autre exemple, que le premier terme soit $=1$, le

dernier $=2$, le nombre des termes $=10$, & qu'on demande la progression arithmétique qui répond à ces suppositions, nous aurons aussi-tôt pour la différence $\frac{2-1}{10-1}=\frac{1}{9}$; & de là nous conclurons que la progression est :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,	$1\frac{1}{9}$,	$1\frac{2}{9}$,	$1\frac{3}{9}$,	$1\frac{4}{9}$,	$1\frac{5}{9}$,	$1\frac{6}{9}$,	$1\frac{7}{9}$,	$1\frac{8}{9}$,	2.

Autre exemple. Soit le premier terme $=2\frac{1}{3}$, le dernier $=12\frac{1}{2}$, & le nombre des termes $=7$, on aura la différence $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36}$, & par conséquent la progression :

1	2	3	4	5	6	7
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{13}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

409.

Maintenant si les données sont le premier terme a, le dernier terme z & la différence d, elles font trouver le nombre des termes n. Car puisque $z-a=(n-1)d$, on divisera des deux côtés par d, & on aura

$\frac{z-a}{d}=n-1$. Or n étant de 1 plus grand que $n-1$, on a $n=\frac{z-a}{d}+1$; par conséquent le nombre des termes se trouve en divisant la différence entre le premier & le dernier terme, ou $z-a$, par la différence de la progression, & en ajoutant l'unité au quotient $\frac{z-a}{d}$.

Soit, par exemple, le premier terme $=4$, le dernier $=100$, & la différence $=12$, le nombre des termes sera $\frac{100-4}{12}+1$; & voici quels seront ces neuf termes :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Si le premier terme $=2$, le dernier $=6$, & la différence $=1\frac{1}{3}$, le nombre des termes sera $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, & ces quatre termes seront

1	2	3	4
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Soit encore le premier terme $=3\frac{1}{3}$, le dernier $=7\frac{2}{3}$, & la différence $=1\frac{4}{9}$, le

nombre des termes sera $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1$ $=4$; & voici ces quatre termes :

$$3\tfrac{1}{3},\ 4\tfrac{7}{9},\ 6\tfrac{2}{9},\ 7\tfrac{2}{3}.$$

410.

Mais il faut observer que le nombre des termes devant être nécessairement un nombre entier, si on n'avoit pas trouvé un tel nombre pour n dans les exemples de l'article précédent, les questions auroient été absurdes.

Toutes les fois donc qu'on ne trouvera pas un nombre entier pour la valeur de $\frac{z-a}{d}$, il sera impossible de résoudre la question; & par conséquent pour que ces sortes de questions soient possibles, il faut que $z-a$ soit divisible par d.

411.

On conclura de ce que nous avons dit, qu'on a toujours quatre quantités ou élémens à considérer dans une progression arithmétique :

I. le premier terme a,

II. le dernier terme z,

III. la différence d,

IV. le nombre des termes n.

Et les rapports de ces quantités les unes aux autres sont tels, que si on en connoît trois, on est en état de déterminer la quatrieme, car :

I. Si a, d & n sont connus, on a $z = a + (n-1)d$.

II. Si z, d & n sont connus, on a $a = z - (n-1)d$.

III. Si a, z & n sont connus, on a $d = \frac{z-a}{n-1}$.

IV. Si a, z & d sont connus, on a $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

CHAPITRE IV.

De la Sommation des Progreſſions arithmétiques.

412.

On a ſouvent beſoin auſſi de prendre la ſomme d'une progreſſion arithmétique. On la trouveroit en ajoutant enſemble tous les termes ; mais comme cette addition ſeroit très-prolixe, quand la progreſſion conſiſte en un grand nombre de termes, on a imaginé une regle, par le ſecours de laquelle on trouve très-facilement la ſomme dont nous parlons.

413.

Nous conſidérerons d'abord une progreſſion de cette eſpece qui ſoit donnée, & telle que le premier terme $= 2$, la différence $= 3$, le dernier terme $= 29$, & le nombre des termes $= 10$:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Nous voyons que dans cette progreſſion la ſomme du premier & du dernier terme $= 31$; la ſomme du ſecond & du pénultieme $= 31$; la ſomme du troiſieme & de l'antépénultieme $= 31$, & ainſi de ſuite ; & nous en conclurons que la ſomme de deux termes quelconques également éloignés l'un du premier & l'autre du dernier terme, eſt toujours égale à la ſomme du premier & du dernier terme.

414.

Il eſt facile d'en ſaiſir la raiſon. Car ſi nous ſuppoſons le premier terme $= a$, le dernier $= z$, & la différence d, la ſomme du premier & du dernier terme eſt $= a + z$; & le ſecond terme étant $= a + d$ & le pénultieme $= z - d$, la ſomme de ces deux termes eſt auſſi $= a + z$. Enſuite le troiſieme terme étant $a + 2d$, & l'antépénultieme $= z - 2d$, il eſt clair que ces deux termes

ajoutés ensemble font aussi $a+z$. On démontrera la même chose de tous les autres.

415.

Pour parvenir donc à déterminer la somme de la progression proposée on écrira dessous, terme pour terme, la même progression prise à rebours, & on fera l'addition des termes correspondans, comme il suit :

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Cette suite de termes égaux est évidemment égale au double de la somme de la progression proposée ; or le nombre de ces termes égaux est 10, comme dans la progression, & leur somme, par conséquent, $=10.31=310$. Ainsi, puisque cette somme est le double de la somme de la progression arithmétique, il faut que cette somme cherchée soit $=155$.

champ $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6.13 = 78$. Que si l'on vouloit savoir la somme de la même progression continuée jusqu'à 1000, on trouveroit 500500; & la somme de cette progression, continuée jusqu'à 10000, feroit 50005000.

419.

Autre question. Quelqu'un achete un cheval, sous la condition que pour le premier clou il payera 5 sous, pour le second 8, pour le troisieme 11, & pareillement toujours 3 sous de plus pour chacun des suivans : le cheval a 32 clous, on demande combien il coûtera à l'acheteur ?

On voit qu'il s'agit ici de trouver la somme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 5, la différence $= 3$, & la somme des termes $= 32$. Il faut donc commencer par déterminer le dernier terme ; on le trouve (par la regle des articles 406, 411) $= 5 + 31.3 = 98$. Maintenant la somme cherchée se trouve, sans difficulté,

difficulté, $= \frac{103 \cdot 32}{2} = 103 \cdot 16$; d'où l'on conclut que le cheval coûte 1648 sous, ou 82 liv. 8 s.

420.

Soit en général le premier terme $= a$, la différence $= d$, & le nombre des termes $= n$; & qu'il s'agiſſe de trouver, par le moyen de ces données, la ſomme de toute la progreſſion. Comme le dernier terme doit être $= a + (n-1)d$, la ſomme du premier & du dernier ſera $= 2a + (n-1)d$. Multipliant cette ſomme par le nombre des termes n, on a $2na + n(n-1)d$; donc la ſomme cherchée ſera $= na + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Cette formule appliquée à l'exemple précédent, où $a = 5$, $d = 3$, & $n = 32$, donne $5 \cdot 32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$; la même ſomme qu'on avoit trouvée.

421.

S'il eſt queſtion d'ajouter enſemble tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à n, on

a pour trouver cette ſomme : le premier terme $=1$, le dernier terme $=n$, & le nombre des termes $=n$; donc la ſomme cherchée $=\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Si on fait $n=1766$, la ſomme de tous les nombres, depuis 1 juſqu'à 1766, ſera $=883.1767=1560261$.

422.

Soit propoſée la progreſſion des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, &c. continuée juſqu'à n termes, & qu'on en demande la ſomme :

Le premier terme eſt ici $=1$, la différence $=2$, le nombre des termes $=n$; le dernier terme ſera donc $=1+(n-1)2=2n-1$, & par conſéquent la ſomme cherchée $=nn$.

Tout ſe réduit donc à multiplier le nombre des termes par lui-même. Ainſi quel que ſoit le nombre des termes de cette progreſſion qu'on ajoute enſemble, la ſomme ſera toujours un quarré, ſavoir le quarré du

nombre des termes. C'eſt ce que nous allons mettre ſous les yeux :

Indic. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 &c.
Progreſ. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 &c.
Somme, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 &c.

423.

Soit à préſent le premier terme $=1$, la différence $=3$, & le nombre des termes $=n$, on aura la progreſſion 1, 4, 7, 10, &c. dont le dernier terme ſera $=1+(n-3)\,3$ $=3n-2$; donc la ſomme du premier & du dernier terme $=3n-1$, & par conſéquent la ſomme de cette progreſſion $=\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$. Si on ſuppoſe $n=20$, la ſomme eſt $=10.59=590$.

424.

Soit encore le premier terme $=1$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$, le dernier terme ſera $=1+(n-1)d$. Ajoutant le premier on a $2+(n-1)d$, & multipliant par le nombre des termes on

a $2n+n(n-1)d$, d'où se déduit la somme de la progression $=n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Joignons ici la petite table qui suit :

Si $d=1$, la somme est $=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$

$d=2$ ———— $n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$

$d=3$ ———— $n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$

$d=4$ ———— $n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$

$d=5$ ———— $n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$

$d=6$ ———— $n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$

$d=7$ ———— $n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

$d=8$ ———— $n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$

$d=9$ ———— $n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$

$d=10$ ———— $n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$

&c.

CHAPITRE V.

Des Nombres figurés ou polygones.

425.

La ſommation des progreſſions arithmétiques qui commencent par 1, & dont la différence eſt 1 ou 2 ou 3, ou quelqu'autre nombre entier que ce ſoit; cette ſommation, dis-je, nous conduit à la théorie des *nombres polygones*, leſquels ſe forment quand on ajoute enſemble quelques termes de l'une ou de l'autre de ces progreſſions.

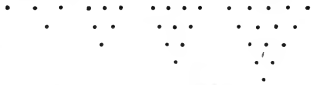
426.

Si on ſuppoſe la différence $=1$; puiſque le premier terme eſt conſtamment $=1$, on aura la progreſſion arithmétique, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. Et ſi dans cette progreſſion on prend la ſomme de un, de deux, de trois &c. termes, on verra ſe former cette ſuite de nombres:

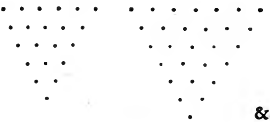
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 &c. car $1=1$, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, &c.

Ces nombres on les nomme *triangulaires* ou *trigonaux*, parce qu'on peut toujours ranger en triangle autant de points qu'ils contiennent d'unités, comme on va voir :

1, 3, 6, 10, 15,



21, 28,

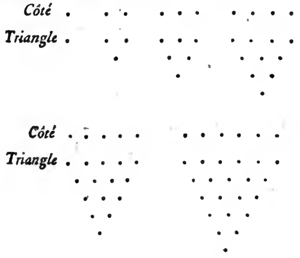


&c.

427.

On voit dans tous ces triangles combien chaque côté contient de points. Dans le premier triangle il n'y a qu'un point ; dans le ſecond il y en a deux ; dans le troiſieme

il y en a trois ; dans le quatrieme il y en a quatre, &c. Ainſi les nombres triangulaires, ou le nombre des points (qu'on nomme ſimplement le *triangle*), ſe reglent ſur le nombre des points que contient le côté, lequel nombre on nomme en un mot le *côté*. C'eſt-à-dire que le troiſieme nombre triangulaire, par exemple, ou le troiſieme triangle, eſt celui dont le côté a trois points ; le quatrieme, celui dont le côté eſt quatre, & ainſi de ſuite ; & voici comment nous repréſenterons cette propriété :



428.

Il ſe préſente donc ici la queſtion, comment, le côté étant donné, on doit déterminer le triangle? Et après ce que nous avons expoſé, nous y ſatisferons facilement.

Car ſoit le côté $= n$, le triangle ſera $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . n$. Or la ſomme de cette progreſſion eſt $= \frac{nn+n}{2}$; par conſéquent la valeur du triangle eſt $\frac{nn+n}{2}$ (*).

Et ſi $n=1$, le triangle eſt $=1$,
ſi $n=2$, ———— $=3$,
ſi $n=3$, ———— $=6$,
ſi $n=4$, ———— $=10$,

& ainſi de ſuite. Lorſque $n=100$, le triangle ſera $= 5050$.

429.

On nomme cette formule $\frac{nn+n}{2}$, la formule générale des nombres triangulaires;

(*) M. *de Joncourt* a publié à la Haye en 1762 une table des nombres trigonaux, qui répondent à tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à 20000. Ces tables peuvent être utiles pour faciliter un grand nombre d'opérations arithmétiques, comme l'Auteur le fait voir dans une Introduction fort étendue.

parce que par son secours on trouve le nombre triangulaire, ou le triangle, qui répond à un côté quelconque indiqué par n.

On peut transformer cette formule en celle-ci, $\frac{n(n+1)}{2}$; & cela sert même à faciliter le calcul, parce que toujours un des deux nombres n, ou $n+1$, est un nombre pair, & par conséquent divisible par 2.

C'est ainsi que si $n=12$, le triangle est $=\frac{12.13}{2}=6.13=78$. Et que si $n=15$, le triangle est $=\frac{15.16}{2}=15.8=120$, &c.

430.

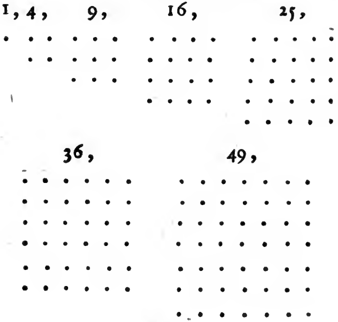
Qu'on suppose à présent la différence $=2$; on aura la progression arithmétique suivante :

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, &c. dont les sommes, en prenant successivement un, deux, trois, quatre termes, &c. forment cette série :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, &c.

On nomme les termes de cette suite, les nombres *quadrangulaires*, ou plutôt

quarrés; puiſqu'en effet cette ſuite repréſente les quarrés des nombres naturels, comme nous les avons trouvés plus haut; & cette dénomination leur convient d'autant plus, qu'on peut toujours former un quarré du nombre de points qu'indiquent ces termes, ainſi qu'on va le voir :



441.

On voit ici que le côté d'un tel quarré contient préciſément le nombre de points

qu'indique la racine quarrée. Le côté du quarré 25, par exemple, eſt de cinq points; celui du quarré 36 eſt de ſix points; & en général donc, ſi le côté eſt n, c'eſt-à-dire que le nombre des termes de la progreſſion, 1, 3, 5, 7, &c. qu'on aura pris, ſoit indiqué par n, on voit que le quarré, ou le nombre quadrangulaire, ſera égal à la ſomme de ces termes, ou $= nn$, ainſi que nous l'avons trouvée à l'article 422. Nous ne nous arrêterons pas davantage à ces nombres quarrés, en ayant traité au long plus haut.

432.

Faiſant maintenant la différence $= 3$, & prenant de la même maniere les ſommes, on obtiendra des nombres qu'on appelle *pentagones*, quoiqu'on ne puiſſe plus ſi bien les repréſenter par des points (*). Ces ſuites commencent ainſi:

(*) Ce n'eſt pas cependant qu'on ne puiſſe auſſi repréſenter par des points les polygones d'un nombre quel-

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Prog. arith. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 &c.
Pentagone, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 &c.
les indices indiquant le côté de chaque pentagone.

433.

Il s'ensuit de là que si on fait le côté $=n$, le nombre pentagone sera $=\frac{3nn-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$. Soit, par exemple, $n=7$, le pentagone sera $=70$. Si on demande le pentagone, dont le côté est 100, on fera $n=100$, & on aura 14950 pour le nombre cherché.

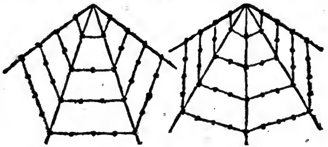
conque de côtés; mais la regle que j'ai remarqué qu'il faut suivre pour cet effet, & que je vais indiquer, me paroît avoir échappé à tous les Algébristes que j'ai consultés.

On commence par tracer un petit polygone régulier qui ait le nombre de côtés qu'on demande; ce nombre reste constant pour une même suite de nombres polygones, & il est égal à 2 *plus* la différence de la progression arithmétique qui produit la suite; on choisit ensuite un des angles de ce polygone pour tirer du point de concours autant de diagonales indéfinies qu'il est possible; on prolonge de même indéfiniment les deux côtés qui forment l'angle qu'on a adopté; après cela on prend ces deux côtés & les diagonales du premier polygone,

434.

Que si l'on suppose la différence $= 4$, on parvient aux nombres *hexagones*, comme on le voit dans les progressions qui suivent :

respectivement autant de fois qu'on veut sur les lignes indéfinies ; on tire des points correspondans où le compas s'est arrêté, des lignes paralleles aux côtés du premier polygone, & on les partage en autant de parties égales, ou par autant de points qu'en ont actuellement les diagonales & les deux côtés prolongés. Cette regle est générale depuis le triangle jusqu'au polygone d'un nombre infini de côtés. Les deux figures qui suivent suffiront pour en faciliter l'application.



La division de ces figures en triangles fournit encore matiere à différentes considérations curieuses & à des transformations assez jolies des formules générales, par lesquelles on voit dans ce chapitre comment s'expriment les nombres polygones ; mais je ne crois pas devoir m'y arrêter.

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Prog. arith. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 &c.
Hexagone, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153 &c.
les indices montrant encore le côté de chaque hexagone.

435.

Ainſi quand le côté eſt n, le nombre hexagone eſt $= 2nn - n = n\,(2n-1)$; & on obſervera au reſte que tous les nombres hexagones ſont auſſi triangulaires, puiſque en ne prenant de ces derniers que le premier, le troiſieme, le cinquieme, &c. on a préciſément la ſuite des hexagones.

436.

On trouvera de la même maniere les nombres heptagones, octogones, ennéagones, &c. Nous nous contenterons de donner encore ici le tableau des formules générales de tous ces nombres, compris ſous le nom général de *nombres polygones*.

En ſuppoſant le côté $= n$, on a

le triangle $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

le quarré $= \frac{2nn+0n}{2} = nn$,

le V gone $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$,

le VI gone $= \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1)$

le VII gone $= \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$,

le VIII gone $= \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$

le IX gone $= \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$,

le X gone $= \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$

le XI gone $= \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$,

le XII gone $= \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$

le XX gone $= \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$

le XXV gone $= \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$,

le m gone $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ (*).

437.

Ainsi le côté étant n, on a en général le nombre m angulaire $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$; d'où l'on peut déduire tous les nombres poly-

(*) On remarquera sans peine que cette table n'est que celle de l'article 424 poussée plus loin.

gones possibles dont le côté seroit n. Si on cherchoit, par exemple, les nombres biangulaires, on auroit $m=2$, & par conséquent le nombre cherché $=n$; c'est-à-dire que les nombres biangulaires sont les nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Si on fait $m=3$, on a le nombre triangulaire $=\frac{nn+n}{2}$.

Si on fait $m=4$, on a le nombre quarré $=nn$, &c.

438.

Supposons, pour éclaircir cette regle par des exemples, qu'on cherche le nombre XXV gone, dont le côté est 36; on cherchera d'abord dans notre table le nombre XXV gone pour le côté n; on le trouvera $=\frac{23nn-21n}{2}$. Faisant ensuite $n=36$, on trouvera le nombre cherché $=14526$.

439.

Question. Quelqu'un a acheté une maison, & on lui demande combien il en a payé? Il répond que le nombre 365 gone de

de 12 eſt le nombre d'écus qu'il l'a achetée.

Afin de trouver ce nombre, on fera $m=365$ & $n=12$; & ſubſtituant ces valeurs dans la formule générale, on trouvera pour le prix de la maiſon 23970 écus. (*).

(*) Le chapitre qu'on vient de lire, eſt intitulé *des nombres figurés* ou *polygones*. On peut avoir remarqué que ce n'eſt pas ſans fondement que quelques Algébriſtes diſtinguent entre nombres *figurés* & nombres *polygones*. En effet les nombres qu'on nomme communément *figurés*, dérivent tous d'une ſeule progreſſion arithmétique, & chaque ſuite de ces nombres ſe forme après cela en ajoutant enſemble les termes de la ſuite précédente. Chaque ſuite des nombres *polygones*, au contraire, provient d'une progreſſion arithmétique différente; cela fait qu'on ne peut dire à la rigueur d'une ſeule ſuite de nombres figurés, qu'elle eſt en même temps une ſuite de nombres polygones. On s'en convaincra mieux en jetant les yeux ſur les tables qui ſuivent.

TABLE DES NOMBRES FIGURÉS.

Nombres		
Nombres conſtans	———	1.1. 1. 1. 1. 1. &c.
naturels	———	1.2. 3. 4. 5. 6. &c.
triangulaires	———	1.3. 6.10.15. 21. &c.
pyramidaux	———	1.4.10.20.35. 56. &c.
triangulo-pyramidaux		1.5.15.35.70.126. &c.

TABLE DES NOMBRES POLYGONES.

Diff. de la progr.	Nombres	
1	triangulaires ——	1.3. 6.10.15. &c.
2	quarrés ———	1.4. 9.16.25. &c.
3	pentagones ——	1.5.12.22.35. &c.
4	hexagones ——	1.6.15.28.45. &c.

Les puiſſances forment auſſi des ſuites particulieres de nombres. Les deux premieres ſe retrouvent dans les nombres figurés, & la troiſieme dans les nombres polygones; c'eſt ce qu'on va voir, en ſubſtituant à a ſucceſſivement les nombres 1, 2, 3 &c.

TABLE DES PUISSANCES.

a^0 ———	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
a^1 ———	1.	2.	3.	4.	5.	&c.
a^2 ———	1.	4.	9.	16.	25.	&c.
a^3 ———	1.	8.	27.	64.	125.	&c.
a^4 ———	1.	16.	81.	256.	625.	&c.

Les Algébriſtes du ſeizieme & du dix-ſeptieme ſiecle ſe ſont tous beaucoup occupés de ces différentes eſpeces de nombres & de leurs rapports entr'elles; ils y ont trouvé une variété ſinguliere de propriétés curieuſes; mais leur utilité n'étant cependant pas grande, on néglige aujourd'hui, avec raiſon, d'en parler beaucoup dans les cours de Mathématiques.

CHAPITRE VI.

Du Rapport Géometrique.

440.

LE *rapport géométrique* entre deux nombres contient la réponse à la question, *combien de fois* l'un de ces nombres est plus grand que l'autre ? On le trouve en divisant l'un par l'autre ; le quotient indique la raison cherchée.

441.

On a donc trois choses à considérer ici ; 1.° le premier des deux nombres proposés, qu'on nomme l'*antécédent ;* 2.° l'autre nombre, qu'on appelle le *conséquent* ; 3.° *la raison* des deux nombres, ou le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent. Par exemple, si c'est le rapport des nombres 18 & 12 qu'il s'agit d'indiquer, 18 est l'antécédent, 12 est le conséquent,

& la raiſon ſera $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; d'où l'on voit que l'antécédent contient le conſéquent une fois & demie.

442.

On a coutume d'indiquer le rapport géométrique par deux points, mis l'un audeſſus de l'autre entre l'antécédent & le conſéquent.

Ainſi $a:b$ ſignifie le rapport géométrique de ces deux nombres, ou la raiſon de b à a. Nous avons déjà remarqué plus haut qu'on ſe ſert de ce ſigne pour indiquer la diviſion, & c'eſt auſſi pourquoi on l'emploie ici; parce qu'afin de connoître ce rapport, il faut qu'on diviſe a par b. La raiſon, indiquée par ce ſigne, ſe prononce en diſant ſimplement a eſt à b.

443.

On repréſente donc l'expreſſion d'un rapport par une fraction dont le numérateur eſt l'antécédent, & dont le dénominateur eſt le conſéquent. La clarté exige

qu'on réduise toujours cette fraction à ses moindres termes, ce qu'on fait, comme nous l'avons montré plus haut, en divisant le numérateur & le dénominateur par leur plus grand commun diviseur. Ainsi la fraction $\frac{18}{12}$ se réduit à $\frac{3}{2}$, en divisant les deux termes par 6.

444.

Les rapports ne different donc entr'eux qu'en tant que leurs raisons sont différentes; & il y a autant de différentes especes de rapports géométriques qu'on peut imaginer de différentes raisons.

La premiere espece est sans contredit celle où la raison devient l'unité; ce cas arrive quand les deux nombres sont égaux, comme dans $3:3$; $4:4$; $a:a$; la raison est ici 1, & à cause de cela on la nomme le rapport de l'égalité.

Viennent ensuite les especes où la raison est un autre nombre entier; dans $4:2$ la raison est 2, & on la nomme raison *double*;

dans 12 : 4 la raifon eft 3, & on la nomme raifon *triple*; dans 24 : 6 la raifon eft 4, & elle s'appelle raifon *quadruple*, &c.

Après ces efpeces-là viennent celles dont les raifons s'expriment par des fractions, comme 12 : 9, où la raifon eft $\frac{4}{3}$ ou $1\frac{1}{3}$; 18 : 27, où la raifon eft $\frac{2}{3}$, &c. On peut même diftinguer parmi celles-ci les raifons où le conféquent contient exactement deux fois, trois fois &c. l'antécédent : tels font les rapports 6 : 12, 5 : 15 &c. dont quelques-uns nomment les raifons, raifons *fous-doubles*, *fous-triples*, &c.

Nous ajouterons qu'on nomme raifon *de nombre à nombre*, celle dont le quotient n'eft pas un nombre inexprimable, l'antécédent & le quotient étant des nombres entiers, comme 11 : 7, 8 : 15 &c. & qu'on appelle raifon *irrationnelle* ou *fourde*, celle dont le quotient ne peut s'exprimer exactement ni par des nombres entiers, ni par des fractions, comme $\sqrt{5}$ à 8, 4 à $\sqrt{3}$.

445.

Soit à présent a l'antécédent, b le conséquent & d la raison, nous savons déjà que a & b étant donnés, on trouve $d = \frac{a}{b}$.

Que si le conséquent b étoit donné avec la raison, on trouveroit l'antécédent $a = bd$, parce que bd divisé par b fait d. Enfin si l'antécédent a est donné & la raison d, on trouvera le conséquent $b = \frac{a}{d}$; car en divisant l'antécédent a par ce conséquent $\frac{a}{d}$, on trouve le quotient d, c'est-à-dire la raison.

446.

Tout rapport $a:b$ reste constant, soit qu'on multiplie ou qu'on divise l'antécédent & le conséquent par le même nombre, parce que la raison reste la même. Soit d la raison de $a:b$, on a $d = \frac{a}{b}$; or la raison du rapport $na:nb$ est aussi $\frac{a}{b} = d$, & celle du rapport $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ est pareillement $\frac{a}{b} = d$.

447.

Quand une raiſon a été réduite à ſes moindres termes, il eſt facile d'en reconnoître le rapport & de l'énoncer. Par exempl. quand la raiſon $\frac{a}{b}$ a été réduite à la fraction $\frac{p}{q}$, on dit $a:b = p:q$, $a:b::p:q$, ce qui ſe prononce, a eſt à b comme p eſt à q. Ainſi, la raiſon du rapport $6:3$ étant $\frac{2}{1}$ ou 2, on dira $6:3 = 2:1$. On aura de même $18:12 = 3:2$, & $24:18 = 4:3$, & $30:45 = 2:3$ &c. Que ſi la raiſon ne peut s'abréger, le rapport ne deviendra pas plus clair; on ne ſimplifie pas en diſant $9:7 = 9:7$.

448.

On peut, au contraire, transformer quelquefois en un rapport clair & ſimple celui de deux très-grands nombres, ſavoir, lorſque la raiſon ſe réduit à de très-petits termes. Par exemple, quand on peut dire $28844:14422 = 2:1$, ou $10566:7044 = 3:2$, ou $57600:25200 = 16:7$.

449.

Il eſt donc eſſentiel, pour exprimer un rapport quelconque de la maniere la plus claire qu'il ſoit poſſible, de chercher à réduire la raiſon aux plus petits nombres qu'il ſe puiſſe. Cela ſe fait facilement, en diviſant les deux termes du rapport par leur plus grand commun diviſeur. Par exemple, pour réduire le rapport 57600:25200 à celui-ci, 16:7, tout conſiſte dans la ſeule opération de diviſer les nombres 576 & 252 par 36, qui eſt leur plus grand commun diviſeur.

450.

On voit donc auſſi combien il importe qu'on ſache toujours trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres donnés; mais c'eſt ce qui demande une méthode que nous détaillerons dans le chapitre ſuivant.

CHAPITRE VII.

Du plus grand commun Diviseur de deux Nombres donnés.

451.

Il est des nombres qui n'ont d'autre commun diviseur que l'unité, & quand le numérateur & le dénominateur d'une fraction sont de cette nature, il n'est pas possible de la réduire à une forme plus commode.

On voit, par exemple, que les deux nombres 48 & 35 n'ont pas de commun diviseur, quoique chacun ait ses diviseurs en particulier. C'est pourquoi on ne peut exprimer plus simplement le rapport 48 : 35, parce que la division de deux nombres par 1 ne les rend pas plus petits.

452.

Mais lorsque les deux nombres ont un commun diviseur, on le trouve, & même

le plus grand qu'ils aient, par la regle ſuivante :

Il faut diviſer le plus grand des deux nombres par le plus petit ; on diviſera enſuite par le réſidu le diviſeur précédent ; ce qui reſte dans cette ſeconde diviſion, ſervira après cela de diviſeur pour une troiſieme diviſion, dans laquelle le réſidu ou le diviſeur précédent ſera le dividende, & on continuera de la même maniere juſqu'à ce qu'on arrive à une diviſion ſans reſte ; le diviſeur de cette diviſion, & par conſéquent le dernier diviſeur, ſera le plus grand commun diviſeur des deux nombres donnés.

Voici cette opération pour les deux nombres 576 & 252 :

252	576	2				
	504					
	72	252	3			
		216				
		36	72	2		
			72			
			0.			

Ainsi le plus grand commun diviseur est ici 36.

453.

Il sera bon d'éclaircir encore cette regle par quelques autres exemples.

Supposons qu'on cherche le plus grand commun diviseur des nombres 504 & 312, on aura :

```
312 | 504 | 1
    | 312 |
    -------
      192 | 312 | 1
          | 192 |
          -------
            120 | 192 | 1
                | 120 |
                -------
                   72 | 120 | 1
                      |  72 |
                      -------
                         48 | 72 | 1
                            | 48 |
                            ------
                              24 | 48 | 2
                                 | 48 |
                                 ------
                                    0.
```

Ainsi 24 est le plus grand commun diviseur, & par conséquent le rapport 504:312 se réduit à la forme 21:13.

454.

Soit donné le rapport 625 : 529, & qu'on cherche le plus grand diviſeur commun entre ces deux nombres :

529	625	1
	529	
96	529	5
	480	
49	6	1
	49	
47	49	1
	47	
2	47	23
	46	
1	2	2
	2	
	0.	

Donc 1 eſt ici le plus grand commun diviſeur, & par conſéquent on ne peut exprimer la raiſon 625 : 529 par des nombres plus petits, & la réduire à de moindres termes.

455.

Il ſera néceſſaire à préſent de donner auſſi la démonſtration de cette regle. Suppoſons pour cela que a ſoit le plus grand & b le plus petit des nombres donnés, & que d ſoit un de leurs communs diviſeurs, on comprendra d'abord que a & b étant diviſibles par d, on pourra auſſi diviſer par d les quantités $a-b$, $a-2b$, $a-3b$, & en général $a-nb$.

456.

Le réciproque n'eſt pas moins vrai; c'eſt-à-dire que ſi les nombres b & $a-nb$ ſont diviſibles par d, le nombre a ſera auſſi diviſible par d. Car nb pouvant être diviſés par d, on ne pourroit diviſer $a-nb$ par d, ſi a n'étoit pas diviſible de même par d.

457.

Nous remarquerons de plus que ſi d eſt le *plus grand* commun diviſeur des deux nombres b & $a-nb$, il ſera auſſi le plus

grand commun diviſeur des deux nombres a & b. Car ſi, pour ces nombres a & b, un diviſeur commun plus grand que d pouvoit avoir lieu, ce nombre ſeroit auſſi un diviſeur commun de b & $a—nb$, & par conſéquent d ne ſeroit pas le plus grand diviſeur de ces deux nombres. Or nous venons de ſuppoſer d le plus grand diviſeur commun à b & à $a—nb$; donc il faut que d ſoit auſſi le plus grand commun diviſeur de a & de b.

458.

Ces trois choſes étant poſées, diviſons, ſuivant la regle, le plus grand nombre a par le plus petit b; & ſuppoſons le quotient$=n$, nous aurons le réſidu $a—nb$, qui ne peut qu'être plus petit que b. Or ce reſte $a—nb$ ayant le même plus grand commun diviſeur avec b que les nombres donnés a & b, on n'a qu'à recommencer la diviſion, en diviſant le diviſeur précédent b par ce réſidu $a—nb$; le nouveau réſidu qu'on

obtiendra, aura encore, avec le diviſeur précédent, le même plus grand commun diviſeur, & ainſi de ſuite.

459.

On continuera donc de la même maniere, juſqu'à ce qu'on parvienne à une diviſion ſans reſte, c'eſt-à-dire où le réſidu ſoit zéro. Soit p ce dernier diviſeur, contenu exactement un certain nombre de fois dans ſon dividende; ce dividende ſera donc diviſible par p, & aura la forme mp; ainſi ces nombres p & mp ſont tous les deux diviſibles par p, & il eſt sûr qu'ils n'ont pas de plus grand commun diviſeur, parce qu'aucun nombre ne peut être diviſé réellement par un nombre plus grand que lui-même. Par conſéquent c'eſt auſſi ce dernier diviſeur qui eſt le plus grand commun diviſeur des nombres propoſés a & b, & voilà la démonſtration de la regle preſcrite.

460.

Mettons ici encore un exemple de la même regle, en cherchant le plus grand commun

commun diviſeur des nombres 1728 & 2304. Voici l'opération :

```
1728 | 2304 | 1
     | 1728 |
     ---------
       576 | 1728 | 3
           | 1728 |
           --------
              0.
```

Il s'enſuit de là que 576 eſt le plus grand commun diviſeur, & que le rapport 1728 : 2304 ſe réduit à celui-ci, 3:4; c'eſt-à-dire que 1728 eſt à 2304 tout comme 3 eſt à 4.

CHAPITRE VIII.

Des Proportions Géométriques.

461.

DEUX rapports géométriques ſont égaux lorſque leurs raiſons ſont égales. Cette égalité de deux rapports ſe nomme une *proportion géométrique*; & on écrit, par exemple, $a:b=c:d$ ou $a:b::c:d$, pour indiquer que

le rapport $a:b$ eſt égal au rapport $c:d$; mais on exprime plus ſimplement la ſignification de cette formule, en diſant a eſt à b comme c à d. Une telle proportion eſt celle-ci, $8:4=12:6$; car la raiſon du rapport $8:4$ eſt $\frac{2}{1}$, & c'eſt auſſi la raiſon du rapport $12:6$.

462.

Ainſi $a:b=c:d$ étant une proportion géométrique, il faut qu'une même raiſon ait lieu des deux côtés, & que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; & réciproquement ſi les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont égales, on a $a:b=c:d$.

463.

Une proportion géométrique conſiſte donc en quatre termes, tels que le premier, diviſé par le ſecond, donne le même quotient que le troiſieme, diviſé par le quatrieme. On déduit de là une propriété importante, commune à toutes les proportions géométriques, & qui eſt que le produit

du premier & du quatrieme terme eſt toujours égal au produit du ſecond & du troiſieme ; ou plus ſimplement, que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

464.

Prenons, pour démontrer cette propriété, la proportion géométrique $a:b=c:d$, de ſorte que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Si on multiplie l'une & l'autre de ces deux fractions par b, on obtient $a=\frac{bc}{d}$, & multipliant de plus par d des deux côtés, on a $ad=bc$. Or ad eſt le produit des termes extrêmes, bc eſt celui des moyens, & ces deux produits ſe trouvent égaux.

465.

Réciproquement ſi les quatre nombres a, b, c, d, ſont tels que le produit des deux extrêmes a & d eſt égal au produit des deux moyens b & c, on eſt certain qu'ils forment une proportion géométrique. Car, puiſque $ad=bc$, on n'a qu'à diviſer de part

& d'autre par bd, on aura $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & par conféquent $a:b = c:d$.

466.

Les quatre termes d'une proportion géométrique, comme $a:b = c:d$, peuvent fe tranfpofer de différentes manieres, fans que la proportion ceffe de fubfifter. Car le principal étant toujours que le produit des extrêmes foit égal au produit des moyens, ou $ad = bc$, on peut dire : 1.° $b:a = d:c$; 2.° $a:c = b:d$; 3.° $d:b = c:a$; 4.° $d:c = b:a$.

467.

Outre ces quatre proportions géométriques, on peut en déduire encore d'autres de la même proportion, $a:b = c:d$. On peut dire : $a + b:a$, ou le premier terme plus le fecond, eft au premier, comme le troifieme + le quatrieme eft au troifieme, c'eft-à-dire, $a + b:a = c + d:c$.

On peut enfuite dire : le premier — le fecond eft au premier comme le troifieme

— le quatrieme eſt au troiſieme, ou bien $a-b:a=c-d:c$.

Car ſi l'on prend le produit des extrêmes & des moyens, on a $ac-bc=ac-ad$, ce qui revient évidemment à l'égalité $ad=bc$.

Enfin il eſt facile auſſi de démontrer que $a+b:b=c+d:d$; & que $a-b:b=c-d:d$.

468.

Toutes les proportions que nous avons vu dériver de $a:b=c:d$, peuvent ſe repréſenter de la maniere générale qui ſuit :

$$ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd.$$

Car le produit des termes extrêmes eſt $mpac+npbc+mqad+nqbd$, ou, puiſque $ad=bc$, ce produit devient $mpac+npbc+mqbc+nqbd$. De plus le produit des termes moyens eſt $mpac+mqbc+npad+nqbd$, ou, à cauſe de $ad=bc$, il eſt $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, ainſi ces deux produits ſont égaux.

469.

Il eſt donc clair qu'une proportion géométrique étant donnée, par exemple, 6:3

$= 10:5$, on peut en déduire une infinité d'autres de celle-ci. Nous n'en mettrons ici que quelques-unes.

$3:6 = 5:10$; $6:10 = 3:5$; $9:6 = 15:10$;
$3:3 = 5:5$; $9:15 = 3:5$; $9:3 = 15:5$.

470.

Puisque dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, on peut, les trois premiers termes étant connus, trouver par leur moyen le quatrieme. Soient les trois premiers termes $24 : 15 = 40$ à.... comme le produit des moyens est ici 600, il faut que le quatrieme terme multiplié par le premier, c'est-à-dire par 24, fasse pareillement 600 ; par conséquent en divisant 600 par 24, le quotient 25 sera le quatrieme terme cherché ; & la proportion entiere sera $24 : 15 = 40 : 25$. En général donc, si les trois premiers termes sont $a : b = c : ....$ on mettra d pour la quatrieme lettre inconnue ; & puisqu'il faut que $ad = bc$, on divisera de part

& d'autre par a, & on aura $d = \frac{bc}{a}$. Ainſi le quatrieme terme eſt $= \frac{bc}{a}$, & on le trouve en multipliant le ſecond terme par le troiſieme, & en diviſant ce produit par le premier terme.

471.

Voilà le fondement de cette *regle de trois* ſi célebre dans l'arithmétique ; car que cherche-t-on dans cette regle ? On ſuppoſe trois nombres donnés, & on en cherche un quatrieme qui ſoit avec ceux-là en proportion géométrique ; de façon que le premier ſoit au ſecond comme le troiſieme eſt au quatrieme.

472.

Quelques circonſtances particulieres ſe préſentent à remarquer ici.

D'abord, ſi dans deux proportions les premiers & les troiſiemes termes ſont les mêmes, comme dans $a:b = c:d$ & $a:f = c:g$, je dis que les deux ſeconds & les deux quatriemes termes ſeront auſſi en proportion

géométrique, & que $b:d=f:g$. Car la premiere proportion ſe transformant en celle-ci, $a:c=b:d$, & la ſeconde en celle-ci, $a:c=f:g$, il s'enſuit que les raiſons $b:d$ & $f:g$ ſont égales, puiſque chacune d'elles eſt égale à la raiſon $a:c$. Par exemple, ſi $5:100=2:40$, & $5:15=2:6$, il faut que $100:40=15:6$.

473.

Mais ſi deux proportions ſont telles que les termes moyens ſont les mêmes dans l'une & dans l'autre, je dis que les premiers termes ſeront en raiſon inverſe avec les quatriemes. C'eſt-à-dire, ſi $a:b=c:d$, & $f:b=c:g$, il s'enſuit que $a:f=g:d$. Soient, par exemple, les proportions $24:8=9:3$, & $6:8=9:12$, on aura $24:6=12:3$. La raiſon en eſt évidente : la premiere proportion donne $ad=bc$; la ſeconde donne $fg=bc$; donc $ad=fg$ & $a:f=g:d$, ou $a:g=f:d$.

474.

Deux proportions étant données, on peut toujours en faire une nouvelle, en multi-

pliant séparément le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre, le second par le second, & ainsi des autres termes. C'est ainsi que les proportions $a:b=c:d$ & $e:f=g:h$ fourniront celle-ci, $ae:bf=cg:dh$. Car la premiere donnant $ad=bc$, & la seconde donnant $eh=fg$, on aura aussi $adeh=bcfg$. Or $adeh$ est le produit des extrêmes, & $bcfg$ est le produit des moyens dans la nouvelle proportion; ainsi ces deux produits étant égaux, la proportion est vraie.

475.

Soient, par exemple, les deux proportions, $6:4=15:10$ & $9:12=15:20$, leur combinaison donnera la proportion, $6.9:4.12=15.15:10.20$,

ou $54:48=225:200$,

ou $9:8=9:8$.

476.

Nous observerons enfin que si deux produits sont égaux, comme $ad=bc$, on peut

réciproquement convertir cette égalité en une proportion géométrique.

On a toujours l'un des facteurs du premier produit à un des facteurs du second produit, comme l'autre facteur du second produit à l'autre facteur du premier produit; c'est-à-dire, dans notre cas $a:c=b:d$, ou $a:b=c:d$. Soit $3.8=4.6$, on en formera cette proportion, $8:4=6:3$, ou celle-ci, $3:4=6:8$. De même si $3.5=1.15$, on aura $3:15=1:5$, ou $5:1=15:3$, ou $3:1=15:5$.

CHAPITRE IX.

Remarques sur les Proportions & sur leur usage.

477.

CETTE théorie est tellement nécessaire dans la vie commune, que personne presque ne peut s'en passer. Il y a toujours proportion entre les prix & les marchandises;

& quand il eſt queſtion de différentes eſpeces de monnoie, tout ſe réduit à déterminer les rapports qui ſont entr'elles. Les exemples que ces réflexions nous fourniſſent, ſeront très-propres à éclaircir les principes des proportions, & en faire voir l'utilité dans l'application.

478.

On voudroit ſavoir, par exemple, le rapport entre deux eſpeces de monnoie: ſuppoſons un louis d'or vieux & un ducat; il faudra voir d'abord combien ces eſpeces valent, étant comparées à une même eſpece. Ainſi un louis vieux valant à Berlin 5 rixdales & 8 gros, & un ducat valant 3 rixdales, ſi on réduit ces deux valeurs à une même eſpece; ſoit à des rixdales, ce qui donne la proportion 1 L.:1 D.:$= 5\frac{1}{3}$ R. :3 R. ou $= 16 : 9$; ſoit à des gros, dans lequel cas on auroit 1 L.:1 D. $= 128 : 72 = 16 : 9$. On voit que ces proportions donnent le rapport juſte du louis vieux au ducat;

car l'égalité des produits des extrêmes & des moyens donne dans l'une & dans l'autre 9 louis = 16 ducats ; & au moyen de cette comparaison on pourra changer en ducats une somme quelconque de louis d'or vieux, & réciproquement. Supposez qu'on demande combien 1000 louis vieux font en ducats, vous ferez cette regle de trois : 9 louis font 16 ducats ; que font 1000 louis? & vous répondrez, 1777 $\frac{7}{9}$ ducats.

Que si l'on demandoit, au contraire, combien 1000 ducats font de louis d'or vieux, il faudroit faire cette regle de trois : 16 ducats font 9 louis ; que font 1000 ducats? *réponse*, 562 $\frac{1}{2}$ louis d'or vieux.

479.

Ici (à Saint-Pétersbourg) la valeur du ducat varie & dépend du cours du change. C'est ce cours qui détermine la valeur du rouble en stuvers ou sous de Hollande, desquels 105 font un ducat.

Ainsi quand le change est à 45 stuvers,

on a cette proportion, 1 rouble : 1 ducat $= 45 : 105 = 3 : 7$; & de là l'égalité : 7 roubles $=$ 3 ducats.

On trouvera par-là combien un ducat fait en roubles; car 3 ducats : 7 roubles $=$ 1 ducat :... *réponse*, $2\frac{1}{3}$ roubles.

Si le change étoit à 50 ſtuvers, on auroit cette proportion, 1 rouble : 1 ducat $= 50 : 105 = 10 : 21$, ce qui donneroit 21 roubles $=$ 10 ducats; & on auroit 1 ducat $= 2\frac{1}{10}$ roubles. Enfin, quand le change eſt à 44 ſtuvers, on a 1 rouble : 1 ducat : $= 44 : 105$, & par conſéquent 1 ducat $= 2\frac{17}{44}$ roubles $=$ 2 roubles $38\frac{7}{14}$ copeckes.

480.

Il s'enſuit de là qu'on peut auſſi comparer enſemble plus de deux eſpeces de monnoie, ce qu'on a très-fréquemment occaſion de faire dans les lettres de change. Suppoſons, pour en donner un exemple, que quelqu'un d'ici ait 1000 roubles à faire payer à Berlin,

& qu'il veuille ſavoir combien cette ſomme fait en ducats à Berlin.

Le change eſt ici à $47\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire qu'un rouble fait $47\frac{1}{2}$ ſtuvers. En Hollande, 20 ſtuvers font un florin; $2\frac{1}{2}$ florins de Hollande font une rixdale de Hollande. De plus le change de la Hollande avec Berlin eſt à 142, c'eſt-à-dire que pour 100 rixdales hollandoiſes on paye à Berlin 142 rixdales. Enfin le ducat vaut à Berlin 3 rixdales.

481.

Pour réſoudre maintenant la queſtion propoſée, allons pas à pas. En commençant donc par les ſtuvers, puiſque 1 rouble $= 47\frac{1}{2}$ ſtuvers, ou 2 roubles $= 95$ ſtuvers nous ferons 2 roubles : 95 ſtuvers $=$ 1000... *réponſe*, 47500 ſtuvers; & ſi nous allons plus loin & que nous diſions, 20 ſtuvers : 1 florin $=$ 47500 ſtuvers : .... nous aurons 2375 florins.

De plus, $2\frac{1}{2}$ florins $=$ 1 rixdale hollan-

doiſe, ou 5 florins = 2 rixdales hollandoiſes; on fera donc 5 florins : 2 rixdales hollandoiſes = 2375 florins : .... *réponſe*, 950 rixdales hollandoiſes.

Prenant enſuite les écus de Berlin ſuivant le change à 142, nous aurons 100 rixdales hollandoiſes : 142 rixdales = 950 : au quatrieme terme, 1349 rixdales de Berlin. Paſſons enfin aux ducats, & diſons 3 rixdales : 1 ducat = 1349 rixdales à..... *rép.* $449\frac{2}{3}$ ducats.

482.

Suppoſons, pour rendre ces calculs encore plus complets, que le Banquier de Berlin faſſe difficulté, ſous quelque prétexte que ce ſoit, de payer cette ſomme, & qu'il ne veuille acquitter la lettre de change qu'à raiſon de cinq pour cent de rabais, c'eſt-à-dire en ne payant que 100 au lieu de 105, il faudra encore faire cette regle de trois: $105 : 100 = 449\frac{2}{3}$ à un quatrieme terme, qui eſt $428\frac{16}{63}$ ducats.

483.

Nous venons de voir qu'on avoit beſoin de ſix opérations en ſe ſervant de la regle de trois ; or on a trouvé moyen d'abréger extrêmement ces calculs par la regle qu'on nomme *regle de réduction*. Pour expliquer cette regle, nous conſidérerons d'abord les deux antécédens de chacune des ſix opérations précédentes :

I.)	2 roubles	:	95 ſtuvers.
II.)	20 ſtuvers	:	1 flor. holl.
III.)	5 flor. holl.	:	2 rixd. holl.
IV.)	100 rixd. hol.	:	142 rixd.
V.)	3 rixdales	:	1 ducat.
VI.)	105 ducats	:	100 ducats.

Si nous repaſſons à préſent ſur les calculs ci-deſſus, nous remarquerons que nous avons toujours multiplié la ſomme propoſée par les ſeconds termes, & que nous avons diviſé les produits par les premiers termes ; il eſt donc clair qu'on parviendra au même réſultat, en multipliant la ſomme

propoſée

proposée toute d'une fois, par le produit de tous les seconds termes, & en divisant par le produit de tous les premiers termes. Ou, ce qui revient au même, qu'on n'aura qu'à faire la regle de trois suivante : Comme le produit de tous les premiers termes est au produit de tous les seconds termes, ainsi le nombre de roubles donné est au nombre de ducats payables à Berlin.

484.

Ce calcul s'abrége encore davantage, quand parmi les premiers termes il s'en trouve qui ont des diviseurs communs avec quelques-uns des seconds termes ; car dans ce cas on efface ces termes, & on met à la place les quotiens provenus de la division par ce diviseur commun. L'exemple précédent prendra de cette maniere la forme qu'on va voir :

Roubles	1.	1995	ſtuv. 1000 r^bles.
	20.	1	flor. holland.
	5.	2	rixd. holland.
	100.	142	rixd.
	3.	1	duc.
	105.21.	5 100	duc.

6300 : 2698 = 1000 à....

7)26980.

9)3854(2.

428(2. *Rép.* 428 $\frac{16}{63}$ ducats.

485.

L'ordre qu'il faut ſuivre en ſe ſervant de la regle de réduction eſt celui-ci : on commence par l'eſpece de monnoie dont il eſt queſtion, & on la compare avec une autre qui doit commencer le rapport ſuivant, dans lequel on compare cette ſeconde eſpece avec une troiſieme, & ainſi de ſuite; de façon que chaque rapport commence par l'eſpece par laquelle le rapport précédent finiſſoit ; on continue de même juſqu'à ce

qu'on arrive à l'espece sur laquelle on demande la réponse, & à la fin on tient compte encore des faux frais.

486.

Donnons encore d'autres exemples, afin de faciliter la pratique de ces opérations.

Si les ducats gagnent à Hambourg 1 pour cent sur deux rixdales de banque, c'est-à-dire que 50 ducats valent, non pas 100, mais 101 rixdales de banque, & que le change entre Hambourg & Konigsberg soit 119 gros de Pologne, c'est-à-dire que 1 rixdale *banco* fasse 119 gros polonois, combien feront 1000 ducats en florins polonois? 30 gros polonois font 1 florin polon.

Ducat 1 : 2 rixd. B.° 1000 duc.
2⌀⌀ 50 : 101 rixd. B.°
1 : 119 gros pol.
30 : 1 flor. pol.
15⌀⌀ : 12019 = 10⌀⌀ duc.
3)120190.
5)40063(1,
8012(3. *Rép.* 8012 $\frac{2}{3}$ fl. p.

487.

On peut aussi abréger encore un peu davantage, en écrivant le nombre qui fait le troisieme terme au-dessus du second rang; car alors le produit du second rang, divisé par le produit du premier rang, donnera la réponse desirée.

Question. On fait venir à Leipsig des ducats d'Amsterdam, ayant cours dans cette derniere ville à raison de 5 flor. 4 stuvers courans, c'est-à-dire que 1 ducat vaut 104 stuvers, & que 5 ducats valent 26 florins hollandois. Si donc l'*agio di B.*° est à Amsterdam de 5 pour cent, c'est-à-dire que 105 courans fassent 100 de banque, & que le change de Leipsig à Amsterdam, en argent de banque, soit $133\frac{1}{4}$ pour cent, c'est-à-dire que pour 100 rixdales on paye à Leipsig $133\frac{1}{4}$ rixdales; enfin 2 rixdales de Hollande faisant 5 florins de Hollande, on demande combien, suivant ces changes, il faudra payer de rixdales à Leipsig pour 1000 ducats?

		5.1000 ducats.
Ducats 5	:	26 fl. holl. cour.
105.21	:	4.20.100 flor. holl. B.°
5	:	2 rixd. B.°
400.2	:	533 rixd. à Leipf.

21 : 3)55432(1.

7)18477(4.

2639.

Rép. 2639 $\frac{13}{21}$ rixdales, ou 2639 rixdales & 15 bons gros.

CHAPITRE X.

Des Rapports composés.

488.

On obtient des *rapports composés*, en multipliant par ordre les termes de deux ou de plusieurs raisons, les antécédens par les antécédens, & les conséquens par les

conséquens ; & on dit alors que le rapport entre ces deux produits est *composé* des rapports donnés.

C'est ainsi que les rapports $a:b$, $c:d$, $e:f$ donnent le rapport composé $ace:bdf$ (*).

489.

Une raison restant toujours la même, quand, pour l'abréger, on divise ses deux termes par un même nombre, on peut faciliter beaucoup la composition ci-dessus en comparant les antécédens & les conséquens dans le dessein de faire de telles réductions, ainsi que nous l'avons fait dans le chapitre précédent.

Voici, par exemple, comment on trouve le rapport composé des rapports donnés qui suivent.

(*) Chacune de ces trois raisons est dite être une des *racines* de la raison composée.

Rapports donnés.

12 : 25, 28 : 33, & 55 : 56.

$$\begin{array}{lcl} \cancel{12}, \cancel{4}, 2 & : & 5 . \cancel{25}. \\ \cancel{28} & : & \cancel{11}\ \cancel{33}. \\ \cancel{55}\ \cancel{5} & : & \cancel{2}\ \cancel{56}. \\ \hline 2 & : & 5. \end{array}$$

Donc 2 : 5 eſt la raiſon compoſée qu'on cherchoit.

490.

Le même procédé a lieu, quand il s'agit d'opérer en général ſur des lettres ; & le cas le plus remarquable eſt celui où chaque antécédent eſt égal au conſéquent de la raiſon précédente. Si les raiſons données ſont

$$\begin{array}{l} a : b \\ b : c \\ c : d \\ d : e \\ e : a; \end{array}$$

la raiſon compoſée eſt 1 : 1.

491.

On verra l'utilité de ces principes, en remarquant que deux champs quarrés ont entr'eux un tel rapport, composé des rapports des longueurs & des largeurs.

Soient, par exemple, les deux champs *A* & *B*; que *A* ait 500 pieds de longueur sur 60 pieds de largeur, & que la longueur de *B* soit de 360 pieds, & sa largeur de 100 pieds; le rapport des longueurs sera 500:360, & celui des largeurs 60:100. Ainsi l'on a

$$\frac{\begin{array}{c} \not{5}\not{0}\not{0},5 : 6,\not{3}\not{6}\not{0}. \\ \not{6}\not{0} : 1\not{0}\not{0}. \end{array}}{5 : 6.}$$

Donc le champ *A* est au champ *B* comme 5 à 6.

492.

Autre exemple. Soit le champ *A* long de 720 pieds, large de 88 pieds; le champ *B* long de 660 pieds, & large de 90 pieds,

on composera les rapports de la maniere qui suit :

Rapport des long. 720,8 : 15,60,660.
Rapport des larg. 888 2 : 90.

Rap. des champs A & B, 16 : 15.

493.

De plus, s'il s'agit de comparer deux chambres, relativement à l'espace ou au contenu, on observera que ce rapport est composé de trois rapports ; savoir, de celui des longueurs, de celui des largeurs & de celui des hauteurs. Soit, par exemple, la chambre A, dont la longueur $= 36$ pieds, la largeur $= 16$ pieds, & la hauteur $= 14$ pieds ; & la chambre B, dont la longueur $= 42$ pieds, la largeur $= 24$ pieds, & la hauteur $= 10$ pieds ; on aura ces trois rapports :

pour la longueur 36,6 : 42,7.
pour la largeur 16,4,2 : 24,4.
pour la hauteur 14,2 : 10,5.

4 : 5.

Ainsi le contenu de la chambre *A* est au contenu de la chambre *B* comme 4 à 5.

494.

Lorsque les raisons qu'on compose de cette maniere sont égales, il en résulte des raisons multiples. Savoir, deux raisons égales donnent une *raison doublée* ou *quarrée*; trois raisons égales produisent la *raison triplée* ou *cubique*, & ainsi de suite. Par exemple, les raisons $a:b$ & $a:b$ donnent la raison composée $aa:bb$; c'est pourquoi l'on dit que les quarrés sont en raison doublée de leurs racines. Et le rapport $a:b$ multiplié trois fois, donnant le rapport $a^3:b^3$, on dit que les cubes sont en raison triplée de leurs racines.

495.

On enseigne dans la Géométrie que deux espaces circulaires sont en raison doublée de leurs diametres; cela signifie qu'ils sont l'un à l'autre dans le rapport des quarrés de leurs diametres.

Soit *A* un tel eſpace dont le diametre = 45 pieds, & *B* un autre eſpace circulaire dont le diametre = 30 pieds; le premier eſpace ſera au ſecond comme 45.45 à 30.30, ou, en compoſant ces deux raiſons égales,

$$\begin{array}{c} \not{4}\not{5},\not{9},3 : \not{3}\not{0},\not{6},2. \\ \not{4}\not{5},\not{9},3 : \not{3}\not{0},\not{6},2. \\ \hline 9 : 4. \end{array}$$

Donc ces deux aires ſont entr'elles comme 9 à 4.

496.

On démontre auſſi que les ſolidités des ſpheres ſont en raiſon cubique des diametres de ces globes. Ainſi le diametre d'un globe *A* étant 1 pied, & le diametre d'un globe *B* étant 2 pieds, la ſolidité de *A* ſera à celle de *B* comme $1^3 : 2^3$, ou comme 1 à 8.

Si donc ces ſpheres ſont d'une même matiere, la ſphere *B* peſera 8 fois autant que la ſphere *A*.

497.

On voit qu'on peut trouver par-là le poids des boulets de canon, leurs diametres & le poids d'un seul étant donnés. Soit, par exemple, le boulet *A* dont le diametre $=2$ pouces, & le poids $=5$ livres, & qu'on demande le poids d'un autre boulet dont le diametre seroit de 8 pouces, on aura cette proportion, $2^3:8^3=5$; au quatrieme terme, 320 liv. qui indique le poids du boulet *B*. On auroit pour un autre boulet *C*, dont le diametre seroit $=15$ pouces,

$2^3:15^3=5$...... *Rép.* $2109\frac{3}{8}$ liv.

498.

Quand on cherche le rapport de deux fractions, comme $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, on peut toujours l'exprimer en nombres entiers; car on n'a qu'à multiplier les deux fractions par bd, on obtiendra le rapport $ad:bc$ qui est égal à l'autre, & d'où résulte la proportion $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ $=ad:bc$. Si donc ad & bc ont des diviseurs

communs, le rapport pourra se réduire à de moindres termes. C'est ainsi que $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 . 36 : 24 . 25 = 9 : 10$.

499.

On voudroit savoir encore quel est le rapport des fractions $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{b}$; il est clair qu'on aura $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$; ce qu'on exprime en disant que deux fractions qui ont l'unité pour numérateur, sont en raison *réciproque* ou *inverse* de leurs dénominateurs. On dit la même chose de deux fractions qui ont un même numérateur quelconque ; car $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$. Mais si deux fractions ont leurs dénominateurs égaux, comme $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, elles sont en *raison directe* des numérateurs, savoir, comme $a : b$. Ainsi $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$, & $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$, ou $= 2 : 3$.

500.

On a remarqué dans la chute libre des corps, qu'un corps tombe de 15 pieds dans

une ſeconde, que dans deux ſecondes de temps il tombe de la hauteur de 60 pieds, & que dans trois ſecondes il tombe de 135 pieds; on en a conclu que les hauteurs ſont entr'elles comme les quarrés des temps, & que réciproquement les temps ſont en raiſon ſous-doublée des hauteurs, ou comme les racines quarrées des hauteurs.

Si donc on demande combien de temps il faut à une pierre pour tomber de la hauteur de 2160 pieds; on aura 15:2160=1 au quarré du temps cherché. Ainſi le quarré du temps cherché eſt 144, & par conſéquent le temps qu'on demande eſt 12 ſecondes.

501.

On demande combien de chemin, ou quelle hauteur, une pierre pourra parcourir en tombant pendant une heure de temps, c'eſt-à-dire en 3600 ſecondes? On dira donc, comme les quarrés des temps, c'eſt-à-dire $1^2 : 3600^2$; ainſi la hauteur donnée = 15 pieds, à la hauteur cherchée.

$1 : 12960000 = 15 : \ldots\ldots 194400000$ haut^r. cherchée.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 64800000 \\ 1296 \\ \hline 194400000. \end{array}$$

Si nous comptons maintenant 18000 pieds pour une lieue, nous trouverons cette hauteur de 10800, & par conséquent près de quatre fois plus grande que le diametre de la Terre.

502.

Il en eſt de même à l'égard du prix des pierres précieuſes ; leſquelles ne ſe vendent pas dans la proportion des poids ; tout le monde ſait que ces prix ſuivent un plus grand rapport. La regle pour les diamans eſt, que le prix eſt en raiſon quarrée du poids, c'eſt-à-dire que le rapport des prix eſt égal à la raiſon doublée des poids. On exprime le poids des diamans en carats, & un carat vaut 4 grains ; ſi donc un dia-

mant d'un carat vaut 10 liv. un diamant de 100 carats vaudra autant de fois 10 livres, que le quarré de 100 est plus grand que 1; ainsi on aura, suivant la regle de trois,

$1^2 : \quad 100^2 = 10$ liv. :
ou $1 : 10000 = 10 : \ldots\ldots$ *Rép.* 100000 liv.

Il y a un diamant en Portugal qui pese 1680 carats; son prix se trouvera donc en faisant

$1^2 : \quad 1680^2 = 10$ liv. : ..... ou
$1 : 2822400 = 10 : 28224000$ liv.

503.

Les postes fournissent assez d'exemples de rapports composés, parce qu'elles se payent en raison composée du nombre des chevaux & de celui des lieues ou des postes. Par exemple, un cheval se payant 20 sous par poste, qu'on veuille savoir ce qu'on aura à payer pour 28 chevaux & pour $4\frac{1}{2}$ postes?

postes ? On écrira d'abord le rapport des
chevaux, — — — — — 1 : 28,
sous ce rapport on mettra celui
des postes, — — — — 2 : 9,
& composant les deux rapports,
on aura — — — — — 2 : 252,
ou 1 : 126 = 1 liv. à 126 fr. ou 42 écus.

Autre question. Si on paye un ducat pour huit chevaux par trois milles d'Allemagne, combien coûteront trente chevaux pour quatre milles ? On fera le calcul suivant :

$8\not{4} : \not{3}\not{0}, \not{1}\not{5}, 5.$
$\not{3} : \not{4}.$

$1 : 5 = 1$ duc. : au $4.^e$ terme, qui sera 5 duc.

504.

La même composition des rapports se présente, quand il est question de payer des Ouvriers, puisque ces payemens suivent ordinairement la raison composée du nombre des Ouvriers & de celui des jours qu'on les a employés.

Si on donne, par exemple, 25 sous par jour à un Maçon, & qu'on demande ce qu'il faudra payer à vingt-quatre Maçons qui auront travaillé pendant 50 jours? On fera ce calcul :

1 : 24
1 : 50

1 : 1200=25 :..... 1500 francs
25

20)30000(1500.

Comme dans ces sortes d'exemples on a cinq données, on nomme dans les livres d'Arithmétique regle de cinq, celle qui sert à résoudre ces questions.

CHAPITRE XI.

Des Progreſſions géométriques.

505.

UNE ſuite de nombres qui deviennent toujours un même nombre de fois plus grands ou plus petits, ſe nomme une *progreſſion géométrique*, parce que chaque terme eſt conſtamment au ſuivant dans le même rapport géométrique. Et le nombre qui indique combien de fois chaque terme eſt plus grand que le précédent, s'appelle l'*expoſant*. Ainſi, quand le premier terme eſt 1 & l'expoſant = 2, la progreſſion géométrique devient :

Termes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 &c.

les nombres 1, 2, 3 &c. marquant toujours les quantiemes termes de la progreſſion.

506.

Si on suppose, en général, le premier terme $= a$ & l'exposant $= b$, on a la progression géométrique suivante :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots n.$$

$$Progr.\ a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7 \ldots ab^{n-1}.$$

Ainsi, quand cette progression est de n termes, le dernier terme est $= ab^{n-1}$. Il faut remarquer ici, que si l'exposant b est plus grand que l'unité, les termes augmentent continuellement ; que si l'exposant $b = 1$, les termes sont tous égaux ; enfin, que si l'exposant b est plus petit que 1, ou qu'il ait une fraction, les termes décroissent sans cesse. Ainsi quand $a = 1$ & $b = \frac{1}{2}$, on a cette progression géométrique :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \&c.$$

507.

Ici se présentent donc à considérer :

I.) Le premier terme que nous avons nommé *a*.

II.) L'exposant, que nous appelons b.

III.) Le nombre des termes que nous avons indiqué par n.

IV.) Le dernier terme, que nous avons trouvé $= ab^{n-1}$.

Ainsi, quand les trois premieres de ces parties sont données, on trouve le dernier terme, en multipliant par le premier terme a la $n-1^{e}$ puissance de b, ou b^{n-1}.

Si on demandoit donc le 50e terme de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, &c. on auroit $a=1$, $b=2$ & $n=50$; par conséquent le 50e terme $= 2^{49}$. Or 2^{9} étant $= 512$; 2^{10} sera $= 1024$. Donc le quarré de 2^{10}, ou 2^{20}, $= 1048576$, & le quarré de ce nombre, ou $1099511627776 = 2^{40}$. Multipliant donc cette valeur de 2^{40} par 2^{9} ou par 512, on a 2^{49} égalant 562949953421312.

508.

Une des principales questions qui se présentent dans cette matiere, c'est de trouver

la somme de tous les termes d'une progression géométrique ; nous allons donc en expliquer la méthode. Soit donnée d'abord la progression suivante, composée de dix termes :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, dont nous indiquerons la somme par s, de sorte que :

$s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$; nous aurons, en prenant le double de part & d'autre, $2s = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$. Otant de ceci la progression indiquée par s, il reste $s = 1024 - 1 = 1023$; donc la somme cherchée $= 1023$.

509.

Supposons maintenant que dans la même progression le nombre des termes soit indéterminé & $= n$, de façon que la somme en question, ou s, soit $= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^{n-1}$. Si on multiplie par 2, on a $2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^n$, & soustrayant de

cette égalité la précédente, on a $s = 2^n - 1$. On voit donc que la somme cherchée se trouve, en multipliant le dernier terme, 2^{n-1}, par l'exposant 2, afin d'avoir 2^n, & en soustrayant de ce produit l'unité.

510.

Cela devient encore plus clair par les exemples suivans, où nous substituerons successivement à n les nombres 1, 2, 3, 4, &c.

$1 = 1$; $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 4 = 7$; $1 + 2 + 4 + 8 = 15$; $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$; $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$, &c.

511.

On propose ordinairement dans cette matiere la question qui suit : Un homme propose de vendre son cheval par les clous, qui sont au nombre de 32 ; il demande 1 liard pour le premier clou ; 2 liards pour le second clou, 4 liards pour le troisieme clou, 8 liards pour le quatrieme, & ainsi

de ſuite, en demandant pour chaque clou le double du prix du précédent. On demande quel ſeroit le prix du cheval?

Cette queſtion ſe réduit évidemment à trouver la ſomme de tous les termes de la progreſſion géométrique 1, 2, 4, 8, 16, &c. continuée juſqu'au 32e terme. Or ce dernier terme eſt 2^{31}; & comme nous avons trouvé plus haut $2^{20} = 1048576$, & $2^{10} = 1024$, nous aurons $2^{20} . 2^{10} = 2^{30}$ égal à 1073741824; & en multipliant encore par 2, le dernier terme $2^{31} = 2147483648$; en doublant donc ce nombre & en retranchant l'unité du produit, la ſomme cherchée devient 4294967295 liards. Ces liards font $1073741823 \frac{3}{4}$ ſous, & diviſant par 20 on a 53687091 liv. 3 ſ. 9 den. pour le prix cherché.

512.

Soit à préſent l'expoſant $= 3$, & qu'il s'agiſſe de trouver la ſomme de la progreſſion géométrique 1, 3, 9, 27, 81, 243,

729, composée de 7 termes. Supposons-la pour un moment $=s$, de sorte que
$s=1+3+9+27+81+243+729$.

Nous aurons, en multipliant par 3:
$3s=3+9+27+81+243+729+2187$.

Et soustrayant la série précédente, nous avons $2s=2187-1=2186$. Ainsi le double de la somme est $=2186$, & par conséquent la somme cherchée $=1093$.

513.

Soit dans la même progression le nombre des termes $=n$, & la somme $=s$; de sorte que $s=1+3+3^2+3^3+3^4+\ldots 3^{n-1}$. Si on multiplie par 3, on a $3s=3+3^2+3^3+3^4+\ldots 3^n$. Soustrayant de ceci la valeur de s, comme tous les termes de celle-ci, excepté le premier, détruisent tous les termes de la valeur de $3s$, excepté le dernier, on aura $2s=3^n-1$; donc $s=\frac{3^n-1}{2}$. Ainsi la somme cherchée se trouve en multipliant le dernier terme

par 3, en ſouſtrayant 1 du produit, & en diviſant le reſte par 2. C'eſt ce qu'on voit auſſi par les exemples ſuivans : $1 = 1$; $1 + 3 = \frac{3.3-1}{2} = 4$; $1 + 3 + 9 = \frac{3.9-1}{2} = 13$; $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3.27-1}{2} = 40$; $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3.81-1}{2} = 121$.

514.

Suppoſons maintenant, en général, le premier terme $= a$, l'expoſant $= b$, le nombre des termes $= n$, & leur ſomme $= ſ$, en ſorte que

$$ſ = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots\ ab^{n-1}.$$

Si nous multiplions par b, nous avons

$$bſ = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \ldots\ ab^n;$$

& ſouſtrayant l'égalité précédente il reſte $(b-1)ſ = ab^n - a$; d'où nous tirons facilement la ſomme cherchée $ſ = \frac{ab^n - a}{b-1}$. Par conſéquent la ſomme d'une progreſſion géométrique quelconque ſe trouve ; ſi on multiplie le dernier terme par l'expoſant de la progreſſion, qu'on ſouſtraie du produit le

premier terme & qu'on divise le reste par l'exposant diminué de l'unité.

515.

Soit une progression géométrique de sept termes, dont le premier $= 3$, & que l'exposant soit $= 2$; on aura $a = 3$, $b = 2$ & $n = 7$; donc le dernier terme $= 3.2^6$, ou $3.64 = 192$; & la progression entiere sera

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.$$

Si de plus on multiplie le dernier terme 192 par l'exposant 2, on a 384; ôtant le premier terme 3, il reste 381; & divisant ceci par $b - 1$ ou par 1, on a 381 pour la somme de toute la progression.

516.

Soit encore une autre progression géométrique de six termes, que 4 en soit le premier, & que l'exposant soit $= \frac{3}{2}$. La progression est

$$4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}.$$

Multiplions ce dernier terme $\frac{243}{8}$ par l'exposant $\frac{3}{2}$, nous aurons $\frac{729}{16}$; la soustraction du premier terme 4 laisse le reste $\frac{665}{16}$, qui, divisé par $b - 1 = \frac{1}{2}$, donne $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

517.

Lorsque l'exposant est plus petit que 1, & que, par conséquent, les termes de la progression vont toujours en diminuant, on peut indiquer la somme d'une telle progression décroissante qui iroit à l'infini.

Soit, par exemple, le premier terme $= 1$, l'exposant $= \frac{1}{2}$, & la somme $= s$, en sorte que:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} +, \&c.$$

sans fin.

Si on multiplie par 2, on a

$$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +, \&c.$$

sans fin.

Et soustrayant la progression précédente, il reste $s = 2$ pour la somme de la progression infinie proposée.

518.

Si le premier terme $=1$, l'exposant $=\frac{1}{3}$, & la ſomme $=ſ$; de façon que

$ſ=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+$, &c. à l'infini.

On multipliera le tout par 3, on aura $3ſ=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+$ &c. à l'infini; & ſouſtrayant la valeur de $ſ$, il reſte $2ſ=3$; donc la ſomme $ſ=1\frac{1}{2}$.

519.

Qu'on ait une progreſſion dont la ſomme $=ſ$, le premier terme $=2$, l'expoſant $=\frac{3}{4}$; de façon que

$ſ=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}+$, &c. à l'infini.

Multipliant par $\frac{4}{3}$ on aura $\frac{4}{3}ſ=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}+$, &c. ſans fin. Or ſouſtrayant la progreſſion $ſ$, il reſte $\frac{1}{3}ſ=\frac{8}{3}$; donc la ſomme cherchée $=8$.

520.

Si on ſuppoſe, en général, le premier terme $=a$, & l'expoſant de la progreſſion

$= \frac{b}{c}$, de maniere que cette fraction soit plus petite que 1, & par conséquent c plus grand que b; voici comment on trouvera la somme de cette progression poussée à l'infini : on fera

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{cc} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} +, \&c.$$

sans fin.

Multipliant par $\frac{b}{c}$, on aura

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ \&c. \text{ à l'infini.}$$

Et soustrayant cette égalité de la précédente, il reste $(1 - \frac{b}{c}) s = a$.

Par conséquent $s = \frac{a}{1-\frac{b}{c}}$.

Si on multiplie les deux termes de cette fraction par c, on a $s = \frac{ac}{c-b}$. La somme de la progression géométrique infinie proposée se trouve donc en divisant le premier terme a par 1 moins l'exposant, ou bien en multipliant le premier terme a par le dénominateur de l'exposant, & en divisant le produit par le même dénominateur diminué du numérateur de l'exposant.

521.

On trouve de la même maniere les ſommes des progreſſions, dont les termes ſont affectés alternativement des ſignes + & —. Soit, par exemple,

$$ſ = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} - \text{, \&c.}$$

Si on multiplie par $\frac{b}{c}$, on a

$$\frac{b}{c}ſ = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ \&c.}$$

Et ſi on ajoute cette égalité à la précédente, on obtient $(1 + \frac{b}{c})\,ſ = a$. D'où l'on tire la ſomme cherchée $ſ = \frac{a}{1+\frac{b}{c}}$, ou $ſ = \frac{ac}{c+b}$.

522.

On voit donc que ſi le premier terme $a = \frac{3}{5}$, & l'expoſant $= \frac{2}{5}$, c'eſt-à-dire, $b = 2$ & $c = 5$, on trouvera la ſomme de la progreſſion $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625} + \text{\&c.} = 1$;

puisqu'en soustrayant l'exposant de 1 il restera $\frac{3}{5}$, & qu'en divisant le premier terme par ce reste, le quotient est 1.

On voit en second lieu que si les termes sont alternativement positifs & négatifs, & que la progression ait cette forme :

$$\frac{3}{5}-\frac{6}{25}+\frac{12}{125}-\frac{24}{625}+\&c.$$

la somme sera

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{3}{7}.$$

523.

Autre exemple. Soit la progression infinie $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\&c.$

Le premier terme est ici $\frac{3}{10}$, & l'exposant est $\frac{1}{10}$. Soustrayant ce dernier de 1, il reste $\frac{9}{10}$; & si l'on divise le premier terme par cette fraction, il vient $\frac{1}{3}$ pour la somme de la progression donnée. Ainsi en ne prenant qu'un terme de la progression, savoir $\frac{3}{10}$, l'erreur seroit de $\frac{1}{30}$.

En prenant deux termes, $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{33}{100}$, il

il s'en faudroit encore de $\frac{1}{100}$ que la somme ne fût $=\frac{1}{3}$.

524.

Autre exemple. Soit donnée la progression infinie :

$$9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\text{\&c.}$$

Le premier terme est 9, l'exposant est $\frac{1}{10}$. Ainsi 1 moins l'exposant fait $\frac{9}{10}$; & $\frac{9}{\frac{9}{10}}=10$, somme cherchée.

On remarquera que cette suite s'exprime par une fraction décimale en cette maniere, 9,9999999, &c.

CHAPITRE XII.

Des Fractions décimales infinies.

525.

NOUS avons vu plus haut que dans les calculs logarithmiques on emploie des fractions décimales au lieu des fractions ordi-

naires ; cela ſe pratique auſſi avec beaucoup d'avantage dans d'autres calculs. Il s'agira principalement de faire voir comment on transforme une fraction ordinaire en une fraction décimale, & comment on peut exprimer réciproquement la valeur d'une fraction décimale par une fraction ordinaire.

526.

Qu'on ait généralement à changer en fraction décimale la fraction $\frac{a}{b}$: comme cette fraction exprime le quotient de la diviſion du numérateur a par le dénominateur b, on écrira à la place de a la formule a,0000000, dont la valeur ne differe pas du tout de celle de a, puiſqu'elle ne contient ni dixiemes, ni centiemes &c. On diviſera enſuite cette formule par le nombre b, ſuivant les regles ordinaires de la diviſion, & en obſervant ſeulement de mettre à la place convenable la virgule qui ſépare les décimales & les entiers. Voilà tout le procédé,

& nous allons l'éclaircir par quelques exemples.

Soit donnée d'abord la fraction $\frac{1}{2}$, la division en décimales prendra cette forme :

$$\frac{2)1,0000000}{0,5000000} = \frac{1}{2}.$$

Nous voyons par-là que $\frac{1}{2}$ est autant que 0,5000000 ou que 0,5 ; & en effet cela est évident, puisque cette fraction décimale indique $\frac{5}{10}$, qui équivalent à $\frac{1}{2}$.

527.

Que $\frac{1}{3}$ soit la fraction donnée, on aura

$$\frac{3)1,0000000}{0,3333333} = \frac{1}{3}.$$

Cela fait voir que la fraction décimale, dont la valeur $= \frac{1}{3}$, ne peut, à la rigueur, être discontinuée nulle part, & qu'elle va à l'infini en conservant toujours le nombre 3. Aussi avons-nous trouvé plus haut que les fractions $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$, &c. à l'infini, ajoutées ensemble font $\frac{1}{3}$.

La fraction décimale qui exprime la valeur de $\frac{2}{3}$, se continue de même à l'infini, car on a

$$\frac{3)2{,}0000000}{1{,}6666666}=\frac{2}{3}.$$

Et cela suit d'ailleurs évidemment de ce que nous venons de dire, parce que $\frac{2}{3}$ est le double de $\frac{1}{3}$.

528.

Si $\frac{1}{4}$ est la fraction proposée, on a

$$\frac{4)1{,}0000000}{0{,}2500000}=\frac{1}{4}.$$

Ainsi $\frac{1}{4}$ est autant que 0,2500000 ou que 0,25 ; & cela est clair, puisque $\frac{2}{10}+\frac{5}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

On auroit pareillement pour la fraction $\frac{3}{4}$

$$\frac{4)3{,}0000000}{0{,}7500000}=\frac{3}{4}.$$

Ainsi $\frac{3}{4}=0{,}75$; & en effet $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

La fraction $\frac{5}{4}$ se change en fraction décimale, en faisant

$$\frac{4)5{,}0000000}{1{,}2500000} = \frac{5}{4}.$$

Or $1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$.

529.

On trouvera de la même maniere $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{6}{5} = 1{,}2$, &c.

Quand le dénominateur eſt 6, on trouve $\frac{1}{6} = 0{,}1666666$ &c. ce qui eſt autant que $0{,}666666 - 0{,}5$. Or $0{,}666666 = \frac{2}{3}$ & $0{,}5 = \frac{1}{2}$, donc en effet $0{,}1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

On trouve auſſi $\frac{2}{6} = 0{,}333333$ &c. $= \frac{1}{3}$; mais $\frac{3}{6}$ devient $0{,}5000000 = \frac{1}{2}$. Enſuite $\frac{5}{6} = 0{,}833333 = 0{,}333333 + 0{,}5$, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Lorſque le dénominateur eſt 7, les fractions décimales deviennent plus compliquées. Par exemp. on trouve $\frac{1}{7} = 0{,}142857$ &c. cependant il faut remarquer que ces ſix chiffres 142857 reviennent conſtam-

ment. Pour se convaincre donc que cette fraction décimale exprime précisément la valeur de $\frac{1}{7}$, on peut la transformer en une progression géométrique, dont le premier terme soit $= \frac{142857}{1000000}$, & l'exposant $= \frac{1}{1000000}$; & par conséquent la somme $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$ $= \frac{142857}{999999}$ (en multipliant les deux termes par 1000000) $= \frac{1}{7}$.

531.

On peut prouver encore d'une maniere plus facile, que la fraction décimale trouvée fait exactement $\frac{1}{7}$; car posant pour sa valeur la lettre f, on a

$$
\begin{array}{rl}
f = & 0,142857142857142857 \text{ \&c.} \\
10f = & 1,\ 42857142857142857 \text{ \&c.} \\
100f = & 14,\ 2857142857142857 \text{ \&c.} \\
1000f = & 142,\ 857142857142857 \text{ \&c.} \\
10000f = & 1428,\ 57142857142857 \text{ \&c.} \\
100000f = & 14285,\ 7142857142857 \text{ \&c.} \\
1000000f = & 142857,\ 142857142857 \text{ \&c.} \\
\text{Soustrayez } f = & 0,\ 142857142857 \text{ \&c.} \\
\hline
999999f = & 142857.
\end{array}
$$

Et divisant par 999999, vous aurez $f = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$. Donc la fraction décimale, qu'on avoit fait $= f$, est $= \frac{1}{7}$.

532.

On transformera de la même maniere $\frac{2}{7}$ en une fraction décimale, qui sera 0,28571428 &c. & cela nous conduit à trouver plus facilement la valeur de la fraction décimale que nous venons de supposer $= f$; parce que 0,28571428, &c. doit être le double de celle-là, & par conséquent $= 2f$. Car nous avons eu

$$100f = 14,28571428571 \text{ \&c.}$$

ainsi en soustrayant $2f = 0,28571428571$ &c.

il reste $98f = 14$

donc $f = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}$.

On trouve aussi $\frac{3}{7} = 0,42857142857$ &c. ce qui, après notre supposition, doit être $= 3f$; or nous avons trouvé

$$10f = 1,42857142857, \text{ \&c.}$$

ainsi en soustrayant $3f = 0,42857142857$, &c.

nous avons $7f = 1$, donc $f = \frac{1}{7}$.

533.

Ainſi quand une fraction propoſée a le dénominateur 7, la fraction décimale eſt infinie, & 6 chiffres y ſont continuellement répétés. La raiſon en eſt, comme il eſt facile de s'en appercevoir, qu'en continuant la diviſion il faut qu'on revienne tôt ou tard à un réſidu qu'on aura déjà eu. Or il ne peut reſter dans cette diviſion que 6 nombres différens, ſavoir 1, 2, 3, 4, 5, 6; ainſi, après la ſixieme diviſion au plus tard, il faut que les mêmes chiffres reviennent; mais lorſque le dénominateur eſt de nature à faire parvenir à une diviſion ſans reſte, ces cas-là ne peuvent avoir lieu.

534.

Suppoſons à préſent que 8 ſoit le dénominateur de la fraction propoſée, on trouvera les fractions décimales qui ſuivent:

$\frac{1}{8}=0,125$; $\frac{2}{8}=0,250$; $\frac{3}{8}=0,375$;
$\frac{4}{8}=0,500$; $\frac{5}{8}=0,625$; $\frac{6}{8}=0,750$;
$\frac{7}{8}=0,875$, &c.

535.

Si le dénominateur eſt 9, on a
$\frac{1}{9}=0,111$ &c. $\frac{2}{9}=0,222$ &c. $\frac{3}{9}=0,333$ &c.
Si le dénominateur eſt 10, on a
$\frac{1}{10}=0,100$; $\frac{2}{10}=0,200$; $\frac{3}{10}=0,3$. Cela eſt clair par la nature de la choſe, de même que $\frac{1}{100}=0,01$; que $\frac{37}{100}=0,37$; que $\frac{256}{1000}=0,256$; que $\frac{24}{10000}=0,0024$, &c.

536.

Que 11 ſoit le dénominateur de la fraction propoſée, on aura $\frac{1}{11}=0,0909090$, &c. Or ſuppoſons qu'on veuille trouver la valeur de cette fraction décimale, & nommons-la $ſ$, nous aurons $ſ=0,090909$, & $10ſ=00,909090$; de plus, $100ſ=9,09090$. Si donc nous ſouſtrayons de ceci la valeur de $ſ$, nous aurons $99ſ=9$, & par conſéquent $ſ=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$. Nous aurons auſſi $\frac{2}{11}=0,181818$, &c. $\frac{3}{11}=0,272727$, &c. $\frac{6}{11}=0,545454$, &c.

537.

Il eſt donc un grand nombre de fractions décimales, où un, deux ou pluſieurs chiffres reviennent conſtamment, & qui continuent de cette maniere juſqu'à l'infini. De telles fractions ſont aſſez remarquables, & nous allons faire voir comment on peut trouver aiſément leurs valeurs (*).

(*) Ces fractions décimales périodiques fourniſſent matiere à pluſieurs recherches intéreſſantes; j'avois commencé à m'en occuper, même avant que d'avoir vu cette *Algebre*, & j'aurois peut-être continué, ſi je n'attendois auſſi l'occaſion de voir un Mémoire inſéré dans les *Tranſactions philoſophiques* pour 1769, & intitulé *of the Theory of circulating Fractions.* Je me contenterai de rapporter ici le raiſonnement par lequel j'avois commencé.

Soit $\frac{N}{D}$ une fraction réelle quelconque irréductible à de moindres termes; on demande juſqu'à combien de chiffres il faudra la réduire en décimales, avant que les mêmes termes ou chiffres reviennent. Je ſuppoſe que $10N$ ſoit plus grand que D; ſi cela n'étoit pas, mais que $100\,N$ ou $1000\,N$ ſeulement fût $> D$, il faudroit commencer par voir ſi $\frac{10\,N}{D}$ ou $\frac{100\,N}{D}$ &c. ſe réduit à de moindres termes, ou à une fraction $\frac{N^1}{D^1}$

Supposons d'abord qu'un seul chiffre soit toujours répété, & indiquons-le par a, de sorte que $f = 0,aaaaaaa$. Nous avons

$$10f = a,aaaaaaa,$$

& soustrayant $f = 0,aaaaaaa$

nous aurons $9f = a$; donc $f = \frac{a}{9}$.

Cela posé, je dis que la même période ne peut revenir que lorsque dans la division continuelle qu'on fait, le même résidu N revient. Supposons que jusqu'alors on ait ajouté f zéros, & que Q soit le nombre du quotient en entier, & abstraction faite de la virgule, on aura $\frac{N \times 10^f}{D} = Q + \frac{N}{D}$; donc $Q = \frac{N}{D} \times (10^f - 1)$. Or Q devant être un nombre entier, il s'agit de déterminer pour f le plus petit nombre entier, tel que $\frac{N}{D} \times (10^f - 1)$, ou seulement que $\frac{10^f - 1}{D}$ soit un nombre entier.

Ce problême demande qu'on distingue différens cas: le premier est celui où D est un diviseur de 10, ou de 100 ou de 1000, &c.; & il est clair que dans ce cas aucune fraction périodique ne peut avoir lieu. Nous prendrons pour le second cas celui où D est un nombre impair, & qui ne soit pas un facteur d'une puissance de 10; dans ce cas la valeur de f peut aller jusqu'à $D-1$, mais souvent elle est moindre. Un troisieme cas enfin est celui où D est pair, & où par conséquent, sans être un facteur d'une puissance de 10, il a cependant un

Lorsque deux chiffres sont répétés, comme ab, on a $ſ = 0,abababa$. Donc $100ſ = ab,ababab$; & si on en soustrait $ſ$, il reste $99ſ = ab$; par conséquent $ſ = \frac{ab}{99}$.

Lorsque trois chiffres, comme abc, se trouvent répétés, on a $ſ = a,abcabcabc$; par conséquent $1000ſ = abc,abcabc$; & en soustrayant $ſ$, il reste $999\ ſ = abc$; donc $ſ = \frac{abc}{999}$, & ainsi de suite.

538.

Toutes les fois donc qu'une fraction décimale de cette espece se présente, il est facile d'en trouver la valeur. Soit donnée, par exemple, celle-ci, 0,296296, sa valeur sera $= \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$, en divisant les deux termes par 37.

commun diviseur avec une de ces puissances. Ce commun diviseur ne peut être qu'un nombre de la forme 2^c; si donc $\frac{D}{2^c} = d$, je dis que les périodes seront les mêmes que pour la fraction $\frac{N}{d}$, mais qu'elles ne commenceront qu'au chiffre désigné par c. Ainsi ce cas revient au second cas, & il est évident au reste que c'est celui-ci qui fait l'essentiel de cette théorie.

Cette fraction doit redonner la fraction décimale proposée; & on peut se convaincre facilement que ce résultat a lieu en effet, en divisant 8 par 9, & après cela le quotient par 3, parce que 27=3.9. On a

9)8,0000000
3)0,8888888
0,2962962 &c.

ce qui est la fraction décimale proposée.

539.

Donnons encore un exemple assez curieux, en changeant en fraction décimale la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$, ce qui se fait de la maniere qu'on va voir:

2)1,00000000000000
3)0,50000000000000
4)0,16666666666666
5)0,04166666666666
6)0,00833333333333
7)0,00138888888888
8)0,00019841269841
9)0,00002480158730
10)0,00000275573192
0,00000027557319.

CHAPITRE XIII.

Des Calculs d'intérêts (*).

540.

On a coutume d'exprimer les intérêts d'un capital en *pourcents*, en disant combien on paye annuellement d'intérêt de la somme de 100. Il est assez ordinaire qu'on place son capital à 5 pour cent, c'est-à-dire,

(*) La théorie du calcul de l'intérêt doit ses premiers progrès à *Leibnitz*, qui en donna les principaux élémens dans les *Acta Eruditorum* de Leipsig pour 1683. Elle a fourni matiere ensuite à plusieurs dissertations détachées très-intéressantes ; ceux qui l'ont le plus avancée, sont les Mathématiciens qui ont travaillé sur l'Arithmétique politique, dans laquelle on combine d'une maniere véritablement utile le calcul des probabilités, le calcul de l'intérêt & les données que fournissent depuis environ un siecle les registres mortuaires. De bons élémens d'Arithmétique politique nous manquent encore, quoique cette branche des Mathématiques, aussi belle qu'étendue, ait été fort cultivée en Angleterre, en France & en Hollande.

de maniere qu'on tire 5 écus d'intérêt d'un capital de 100 écus. Ainsi rien de plus facile que de calculer les intérêts d'un capital quelconque : on n'a qu'à dire, suivant la regle de trois :

100 donnent 5 ; que donne le capital proposé ? Soit, par exemple, le capital 860 écus, on trouve son intérêt annuel, en disant :

100:5 = 860 à.... *Rép.* 43 écus.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)4300 \\ \hline 43. \end{array}$$

541.

Nous ne nous arrêterons pas à ces calculs de l'intérêt simple, afin de passer aussi-tôt au calcul de l'*intérêt sur intérêt*. On demande principalement dans ce calcul, à quelle somme monte un capital donné après un certain nombre d'années, si on joint annuellement l'intérêt au capital, & que de cette maniere on augmente continuellement

le capital ? On part, pour résoudre cette question, de ce que 100 écus placés à 5 pour cent se changent au bout d'une année en un capital de 105 écus. Soit le capital $= a$, on trouvera ce qu'il vaut au bout de l'année, en disant : 100 donne 105, que donne a; la réponse est $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, ce que l'on peut aussi écrire de cette maniere, $\frac{21}{20} \cdot a$, ou de celle-ci, $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

542.

Ainsi, quand on ajoute au capital actuel sa vingtieme partie, on obtient la valeur du capital pour l'année prochaine. Ajoutant à celui-ci son vingtieme, on sait ce que vaut le capital donné après deux ans, & ainsi de suite. Il est donc facile d'apprécier les accroissemens successifs & annuels du capital, & de continuer ce calcul aussi loin qu'on voudra.

543.

Supposons un capital qui soit présentement de 1000 écus, qu'il soit placé à cinq pour

pour cent, & qu'on joigne chaque année l'intérêt au capital. Comme ce calcul ne tarde pas à conduire à des fractions, nous nous servirons des fractions décimales, mais sans les pousser plus loin que jusqu'aux milliemes parties d'un écu, vu que des parties plus petites n'entrent pas ici en considération.

Le capital donné de 1000 écus vaudra

après 1 an — — —	1050 écus
	52,5,
après 2 ans — — —	1102,5
	55,125,
après 3 ans — — —	1157,625
	57,881,
après 4 ans — — —	1215,506
	60,775,
après 5 ans — — —	1276,281 &c.

544.

On peut continuer de la même maniere pour autant d'années qu'on voudra; mais lorsque le nombre des années est fort grand, le calcul devient long & ennuyeux; voici comment on peut l'abréger:

Soit le capital présent $= a$, & puisqu'un capital de 20 écus vaut 21 écus au bout de l'année, le capital a vaudra $\frac{21}{20}a$ après un an. Le même capital montera l'année suivante à $\frac{21^2}{20^2}.a = \left(\frac{21}{20}\right)^2.a$. Ce capital de deux ans vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^3.a$ l'année d'après; ce qui sera donc le capital de trois ans. Celui-ci augmentant de même, le capital donné vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^4.a$ au bout de quatre ans. Il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^5.a$ au bout de cinq ans. Après un siecle il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}.a$; & en général $\left(\frac{21}{21}\right)^n.a$ sera la valeur de ce capital après n années; & cette formule servira à déterminer la quantité du capital après un nombre quelconque d'années.

545.

La fraction $\frac{21}{20}$ qui est entrée dans ce calcul, se fonde sur ce que les intérêts ont été comptés à 5 pour cent, & que $\frac{21}{20}$ est au-

tant que $\frac{105}{100}$. Que si les intérêts se comptoient à 6 pour cent, le capital a monteroit à $\left(\frac{106}{100}\right).a$ au bout d'un an ; à $\left(\frac{106}{100}\right)^2.a$ au bout de deux ans ; & à $\left(\frac{106}{100}\right)^n.a$ au bout de n années.

Mais si les intérêts ne sont que de 4 pour cent, le capital a ne vaudra que $\left(\frac{104}{100}\right)^n.a$ après n ans.

546.

Or il est aisé, lorsque le capital a, ainsi que le nombre des années, est donné, de résoudre ces formules par les logarithmes. Car s'il est question de celle que nous avons trouvée dans la premiere supposition, on prendra le logarithme de $\left(\frac{21}{20}\right)^n.a$, qui est $=\log.\left(\frac{21}{20}\right)^n+\log.a$; parce que la formule en question est le produit de $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ & de a. Et comme $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ est une puissance, on aura $L.\left(\frac{21}{20}\right)^n=nL.\frac{21}{20}$. Ainsi le logarithme du capital cherché est $=n.L.\frac{21}{20}$

$+$ L. a. De plus le logarithme de la fraction $\frac{21}{20}$ = L. 21 − L. 20.

547.

Soit à présent le capital = 1000 écus, & qu'on demande de combien il sera au bout de 100 ans, en comptant les intérêts à 5 pour cent?

Nous avons ici $n = 100$. Le logarithme du capital cherché sera par conséquent $= 100\ L.\frac{21}{20} + L.\ 1000$, & voici comment on évalue cette quantité :

	L. 21 = 1,3222193
soustrayant	L. 20 = 1,3010300
	L. $\frac{21}{20}$ = 0,0211893
multipliant par 100	
	100 L. $\frac{21}{20}$ = 2,1189300
ajoutant	L. 1000 = 3,0000000
logarithme du capital cherché.	= 5,1189300

On voit par la caractéristique de ce logarithme, que le capital cherché sera un

nombre de ſix chiffres, & en effet ce capital ſe trouve $=131501$ écus.

548.

Un capital de 3452 livres à 6 pour cent, de combien ſera-t-il après 64 ans ?

Nous avons ici $a=3452$, & $n=64$. Donc le logarithme du capital cherché $=64\,L.\frac{53}{50}+L.\,3452$, ce qu'on calcule de cette maniere :

$$
\begin{array}{rl}
L.\,53 & =1,7242759 \\
\text{ſouſtrayant } L.\,50 & =1,6989700 \\
\hline
L.\,\frac{53}{50} & =0,0253059 \\
\hline
\text{multipl. par } 64: 64\,L.\,\frac{53}{50} & =1,6195776 \\
L.\,3452 & =3,5380708 \\
\hline
 & 5,1576484.
\end{array}
$$

Et en prenant le nombre de ce logarithme, on trouve le capital cherché égal à 143763 livres.

549.

Quand le nombre des années eſt fort grand, comme il s'agit de multiplier ce

nombre par le logarithme d'une fraction, il pourroit provenir une assez grande erreur de ce que les logarithmes ne se trouvent calculés dans les tables que jusqu'à 7 chiffres de décimales. C'est pourquoi il faudra employer des logarithmes poussés à un plus grand nombre de figures, comme on l'a fait dans l'exemple suivant :

Un capital d'un écu restant placé à 5 pour cent pendant 500 ans, & les intérêts s'y joignant annuellement, on demande à quelle somme se montera ce capital après les 500 années ?

On a ici $a=1$ & $n=500$; par conséquent le logarithme du capital cherché est égal à 500 L. $\frac{21}{20}$ + L. 1, ce qui produit ce calcul :

	L. 21 = 1,3222192947339 19
soustrayant	L. 20 = 1,3010299956639 81
	L. $\frac{21}{20}$ = 0,0211892990699 38

mult. par 500 on a 10,5946495 34969000

Voilà donc le logarithme du capital cherché, lequel sera par conséquent égal à 39323200000 écus.

550.

Si on ne se contentoit pas de joindre annuellement l'intérêt au capital, & qu'on voulût encore l'augmenter tous les ans d'une nouvelle somme $=b$, le capital actuel que nous nommerons a, s'accroîtroit chaque année de la maniere qu'on verra :

après 1 an $\frac{21}{20}a+b$,

après 2 ans $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a+\frac{21}{20}b+b$,

après 3 ans $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b+\frac{21}{20}b+b$,

après 4 ans $\left(\frac{21}{20}\right)^4 a+\left(\frac{21}{20}\right)^3 b+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b$
$+\left(\frac{21}{20}\right) b+b$,

après n ans $\left(\frac{21}{20}\right)^n a+\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b+\left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b$
$+\ldots\ldots \frac{21}{20}b+b$.

Ce capital consiste, comme on voit, en deux parties, dont la premiere $=\left(\frac{21}{20}\right)^n a$, & dont l'autre prise à rebours forme la série $b+\frac{21}{20}b+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b+\left(\frac{21}{20}\right)^3 b+\ldots \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$. Cette suite est évidemment une progression géométrique, dont l'exposant est égal à $\frac{21}{20}$.

Nous en chercherons donc la ſomme, en multipliant d'abord le dernier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}b$ par l'expoſant $\frac{21}{20}$; nous aurons $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b$. Souſtrayant enſuite le premier terme b, il reſte $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b - b$; & diviſant enfin par l'expoſant moins 1, c'eſt-à-dire par $\frac{1}{20}$, nous trouverons la ſomme cherchée $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b - 20b$; donc le capital cherché eſt, $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}a + 20\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b - 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^{n}.(a + 20b) - 20b$.

551.

Le développement de cette formule exige qu'on calcule ſéparément ſon premier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}.(a + 20b)$; ce qui ſe fait en prenant ſon logarithme, qui eſt $n\text{L}.\frac{21}{20} + \text{L}.(a+20b)$; car le nombre qui répond à ce logarithme dans les tables, ſera la valeur de ce premier terme. Si l'on ſouſtrait enſuite $20b$ de cette quantité, on connoît le capital cherché.

552.

Queſtion. Quelqu'un a un capital de 1000 écus placé à cinq pour cent, il y ajoute annuellement 100 écus outre les intérêts, on demande la valeur de ce capital au bout de vingt-cinq ans ?

Nous avons ici $a = 1000$; $b = 100$; $n = 25$; voici donc le plan de l'opération :

$$L.\tfrac{21}{20} = 0,021189299.$$

Multipliant par 25 on a

$$25\,L.\tfrac{21}{20} = 0,5297324750$$
$$L.(a + 20b) = 3,4771213135$$
$$= 4,0068537885.$$

Ainſi la premiere partie, ou le nombre qui répond à ce logarithme, eſt 10159,1 écus, & ſi on en ſouſtrait $20b = 1000$, on trouve que le capital en queſtion vaudra, après vingt-cinq ans, 8159,1 écus.

553.

Puis donc que ce capital de 1000 écus va toujours en augmentant, & qu'après

vingt-cinq ans il se monte à $8159 \frac{1}{10}$ écus, on peut faire la question, en combien d'années il montera jusqu'à 1000000 écus.

Soit n ce nombre d'années, & puisque $a = 1000$, $b = 100$, le capital sera au bout de n ans :

$\left(\frac{21}{20}\right)^n (3000) - 2000$, somme qui doit faire 1000000 d'écus ; de là résulte donc cette égalité ou équation :

$$3000 \left(\frac{21}{20}\right)^n - 2000 = 1000000.$$

Ajoutant des deux côtés 2000, on a

$$3000 \left(\frac{21}{20}\right)^n = 1002000.$$

Divisant de part & d'autre par 3000, il vient $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 334$.

Prenant les logarithmes, on a $n\, L. \frac{21}{20} = L.\, 334$; & divisant par $L. \frac{21}{20}$, on obtient $n = \frac{L.\, 334}{L. \frac{21}{20}}$. Or $L.\, 334 = 2,5237465$, & $L. \frac{21}{20} = 0,0211893$; donc $n = \frac{2,5237465}{0,0211893}$. Et si l'on multiplie enfin les deux termes de cette fraction par 10000000, on aura $n = \frac{25237465}{211893}$, ce qui fait cent dix-neuf ans

un mois ſept jours, & c'eſt-là le temps après lequel le capital de 1000 écus ſe ſera accru juſqu'à 1000000 d'écus.

554.

Mais ſi on ſuppoſoit que quelqu'un, au lieu d'augmenter annuellement ſon capital d'une certaine ſomme fixe, le diminuât en employant, chaque année, une certaine ſomme pour ſon entretien, on auroit les gradations ſuivantes pour les valeurs de ce capital a, année par année, en le ſuppoſant placé à 5 pour cent, & en entendant par b la ſomme qu'on en ôte annuellement :

après 1 an, $\frac{21}{20}a - b$,

après 2 ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a - \frac{21}{20}b - b$,

après 3 ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a - \left(\frac{21}{20}\right)^2 b - \frac{21}{20}b - b$,

après n ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b$
$\ldots\ldots - \left(\frac{21}{20}\right) b - b$.

555.

Ce capital conſiſte donc en deux parties, l'une eſt $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$, & l'autre qui doit en être

fouftraite forme, en prenant les termes en rétrogradant, la progreffion géométrique fuivante :

$$b+\left(\tfrac{21}{20}\right)b+\left(\tfrac{21}{20}\right)^2b+\left(\tfrac{21}{20}\right)^3b+\ldots\left(\tfrac{21}{20}\right)^{n-1}b.$$

Nous avons déjà trouvé ci-deffus la fomme de cette progreffion $= 20\left(\tfrac{21}{20}\right)^n b - 20b$; fi donc on fouftrait cette quantité de $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n a$, on aura le capital cherché, après n ans, $= \left(\tfrac{21}{20}\right)^n (a - 20b) + 20b$.

556.

On auroit pu tirer auffi cette formule immédiatement de la précédente. Car de même qu'on ajoutoit, dans la fuppofition précédente, annuellement la fomme b, on ôte à préfent chaque année la même fomme b. On n'a donc qu'à mettre dans la formule précédente, par-tout $-b$ à la place de $+b$. Il faut remarquer principalement ici que, fi $20b$ eft plus grand que a, la premiere partie devient négative, & par conféquent que le capital va toujours en

diminuant. Cela se comprend aisément, car si on ôte plus du capital annuellement qu'il ne s'y joint d'argent en intérêts, il est clair que ce capital doit devenir continuellement plus petit, & qu'à la fin il doit même se réduire absolument à rien. C'est ce que nous allons éclaircir par un exemple.

557.

Question. Quelqu'un a un capital de 100000 écus placé à 5 pour cent ; il lui faut chaque année 6000 écus pour son entretien ; cela fait plus que les intérêts de son argent, lesquels ne se montent qu'à 5000 écus ; par conséquent le capital ira toujours en diminuant. On demande en combien de temps il s'évanouira tout-à-fait. Supposons ce nombre d'années $= n$, & puisque $a = 100000$ & $b = 6000$, nous savons que après n ans la valeur du capital sera $= -20000 \left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$, ou $120000 - 20000 \left(\frac{21}{20}\right)^n$. Ainsi le capital se réduira à zéro, lorsque $20000 \left(\frac{21}{20}\right)^n$ se montera à

120000 écus, ou lorſque 20000 $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ égalera 120000. Diviſant des deux côtés par 20000, on a $\left(\frac{21}{20}\right)^n=6$. Prenant les logarithmes, on a $n\,\text{L.}\,\frac{21}{20}=\text{L.}\,6$. Diviſant par $\text{L.}\,\frac{21}{20}$, il vient $n=\frac{\text{L.}\,6}{\text{L.}\,\frac{21}{20}}=\frac{0,7781513}{0,0211893}$, ou $n=\frac{7781513}{211893}$. Donc $n=36$ ans 8 mois 22 jours, au bout duquel temps il ne reſtera plus rien du capital.

558.

Il ſera bon de faire voir auſſi comment, en partant des mêmes principes, on peut calculer les intérêts pour des temps plus courts que des années entieres. On ſe ſert pour cela de la formule $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ trouvée plus haut, qui exprime la valeur d'un capital placé à 5 pour cent après n années; car ſi le temps eſt de moins d'un an, l'expoſant n devient une fraction, & le calcul ſe fait par les logarithmes comme auparavant. Si on demandoit, par exemple, la valeur du capital après un jour, on feroit $n=\frac{1}{365}$;

ſi c'eſt après deux jours, $n = \frac{2}{365}$, & ainſi de ſuite.

559.

Soit le capital $a = 100000$ écus, placé à 5 pour cent, à combien montera-t-il en huit jours de temps?

Nous avons $a = 100000$, & $n = \frac{8}{365}$, par conſéquent le capital cherché $= (\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}$ 100000. Le logarithme de cette quantité eſt $= \text{L.} (\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + \text{L.}\ 100000 = \frac{8}{365}\ \text{L.}\ \frac{21}{20} + \text{L.}\ 100000$. Or $\text{L.}\ \frac{21}{20} = 0{,}0211893$;

multipliant par $\frac{8}{365}$ on a 0,0004644

ajoutant L. 100000 = 5,0000000

La ſomme eſt = 5,0004644.

Le nombre de ce logarithme ſe trouve $= 100107$. Ainſi dans les premiers huit jours les intérêts du capital font déjà 107 écus.

560.

Dans cette matiere ſe préſentent auſſi les queſtions d'eſtimer la valeur préſente d'une

somme d'argent qui ne feroit payable que dans quelques années. On considérera que, puisque 20 écus en argent comptant montent à 21 écus en douze mois, il faut que réciproquement 21 écus qu'on ne pourroit toucher qu'au bout d'un an, ne valent actuellement que 20 écus. Si donc on exprime par a une somme dont le payement écherroit au bout d'un an, la valeur présente de cette somme est $\frac{20}{21}a$. Ainsi pour trouver combien un capital a, payable seulement au bout d'un certain temps, vaudroit une année plutôt, il faudra le multiplier par $\frac{20}{21}$; pour trouver sa valeur deux ans avant l'échéance, on le multipliera par $(\frac{20}{21})^2 a$; & en général sa valeur, n ans avant l'échéance, s'exprimera par $(\frac{20}{21})^n a$.

561.

Supposons qu'un homme ait à tirer pendant cinq années consécutives une rente annuelle de cent écus, & qu'il veuille la céder pour de l'argent comptant, en comp-

tant

tant les intérêts à 5 pour cent, si on demande combien il doit recevoir, voici comment il faudra raisonner :

Pour 100 écus qui échoient
après 1 an il reçoit 95,239.
après 2 ans ——— 90,704.
après 3 ans ——— 86,385.
après 4 ans ——— 82,272.
après 5 ans ——— 78,355.
somme des 5 termes 432,955.

Ainsi le possesseur de la rente ne peut prétendre en argent comptant que 432,955 écus, ou 1298 livres 17 sous 3 $\frac{3}{5}$ deniers.

562.

On remarquera que si une telle rente devoit durer un nombre d'années beaucoup plus grand, le calcul, de la maniere que nous l'avons fait, deviendroit très-pénible, voici les moyens de le faciliter :

Soit la rente annuelle $= a$, commençant dès-à-présent & durant n années, elle vaudra actuellement :

$a + \left(\frac{20}{21}\right) a + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a + \left(\frac{20}{21}\right)^3 a + \left(\frac{20}{21}\right)^4 a \ldots\ldots$
$+ \left(\frac{20}{21}\right)^n a.$

Voilà une progreſſion géométrique, & tout ſe réduit à en trouver la ſomme. On multipliera donc le dernier terme par l'expoſant, le produit eſt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; ſouſtrayant le premier terme, il reſte $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$; diviſant enfin par l'expoſant moins 1, c'eſt-à-dire, par $-\frac{1}{21}$, ou, ce qui revient au même, multipliant par -21, on aura la ſomme cherchée $= -21 \left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, ou bien, $21a - 21 \left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; & ce ſecond terme qu'il s'agit de ſouſtraire, ſe calcule facilement par les logarithmes.

SECTION QUATRIEME.

Des Equations algébriques, & de la résolution de ces Equations.

CHAPITRE PREMIER.

De la résolution des Problêmes en général.

563.

Le but principal de l'Algebre, ainsi que de toutes les parties des Mathématiques, est de déterminer la valeur de quantités qui auparavant étoient inconnues. On l'atteint en pesant avec attention les conditions prescrites, lesquelles s'expriment toujours par des quantités connues. C'est aussi pourquoi on définit l'Algebre, *la science qui enseigne à déterminer des quantités inconnues par le moyen de quantités connues.*

564.

Ce que nous venons de dire s'accorde aussi avec tout ce qui a été exposé jusqu'ici. Par-tout on a vu la connoissance de certaines quantités faire arriver à celle d'autres quantités qu'on pouvoit auparavant regarder comme inconnues.

L'Addition en offroit d'abord un exemple. Pour trouver la somme de deux ou de plusieurs nombres donnés, il falloit chercher un nombre inconnu qui fût égal à ces nombres connus pris ensemble.

Dans la Soustraction on cherchoit un nombre qui fût égal à la différence de deux nombres connus.

Une multitude d'autres exemples se sont présentés dans la Multiplication & dans la Division, dans l'élévation des puissances & dans l'extraction des racines; la question se réduisoit toujours à trouver, par le moyen de quantités connues, une autre quantité inconnue jusqu'alors.

565.

Enfin dans la derniere ſection nous avons auſſi réſolu différentes queſtions, où il s'agiſſoit de déterminer un nombre qui ne pouvoit être conclu de la connoiſſance d'autres nombres donnés que ſous de certaines conditions.

Toutes les queſtions ſe réduiſent donc à trouver, par le ſecours de quelques nombres donnés, un nouveau nombre qui ait avec ceux-là une certaine connexion; & cette connexion ſe détermine par de certaines conditions ou propriétés qui doivent convenir à la quantité cherchée.

566.

Lorſqu'il ſe préſente une queſtion à réſoudre, on indique par une des dernieres lettres de l'Alphabet le nombre cherché, & on examine enſuite de quelle maniere les conditions données peuvent former une égalité entre deux quantités; cette égalité

qui eſt repréſentée par une eſpece de formule qu'on appelle *équation*, ſert enſuite à déterminer la valeur du nombre cherché, & par conſéquent à réſoudre la queſtion. Il arrive quelquefois qu'on cherche pluſieurs nombres ; on les trouve pareillement par des équations.

567.

Expliquons-nous mieux par un exemple, & ſuppoſons la queſtion ou le *problême* qui ſuit :

Vingt perſonnes, hommes & femmes, mangent dans une auberge ; l'écot d'un homme eſt 8 ſous, celui d'une femme eſt 7 ſous ; & la dépenſe totale ſe monte à 7 liv. 5 ſous : on demande le nombre des hommes & celui des femmes ?

On ſuppoſera, pour réſoudre cette queſtion, que le nombre des hommes ſoit $= x$, & regardant maintenant ce nombre comme connu, on procédera de la même maniere que ſi on vouloit faire la preuve &

voir si ce nombre satisfait à la question. Or le nombre des hommes étant $=x$, & les hommes & les femmes faisant ensemble vingt personnes, il est facile de déterminer le nombre des femmes, on n'a qu'à soustraire de 20 celui des hommes, c'est-à-dire que le nombre des femmes $=20-x$.

Mais un homme dépense 8 sous, donc x hommes dépensent $8x$ sous.

Et puisqu'une femme dépense 7 sous, $20-x$ femmes auront dépensé $140-7x$ sous.

Ainsi ajoutant ensemble $8x$ & $140-7x$, on voit que toutes les 20 personnes auront dépensé $140+x$ sous. Or on sait d'avance combien elles ont dépensé, savoir 7 liv. 5 sous, ou 145 sous ; il faut donc qu'il y ait égalité entre $140+x$ & 145, c'est-à-dire qu'on ait l'équation $140+x=145$, & de là on tire facilement $x=5$.

Donc l'écot étoit de 5 hommes & de 15 femmes.

568.

Autre question de la même espece.

Vingt personnes, hommes & femmes, se trouvent dans une auberge; les hommes dépensent 24 florins, & les femmes autant, & il se trouve qu'un homme a dépensé 1 florin de plus qu'une femme; on demande combien il y avoit d'hommes & combien de femmes?

Soit le nombre des hommes $= x$,
celui des femmes sera $= 20 - x$.

Or ces x hommes ayant dépensé 24 florins, l'écot de chaque homme est de $\frac{24}{x}$ florins.

De plus les $20 - x$ femmes ayant aussi dépensé 24 florins, l'écot de chaque femme est $\frac{24}{20-x}$ florins.

Mais on sait que cet écot d'une femme est d'un florin plus petit que celui d'un homme; si donc on soustrait 1 de l'écot d'un homme, il faut qu'on obtienne celui d'une femme, & par conséquent que $\frac{24}{x}$

$-1=\frac{24}{20-x}$. Voilà donc l'équation de laquelle il s'agit de tirer la valeur de x; on ne trouve pas cette valeur avec la même facilité que dans la queſtion précédente; mais on verra dans la ſuite que $x=8$, & cette valeur ſatisfait en effet à l'équation; car $\frac{24}{8}-1=\frac{24}{12}$ renferme l'égalité $2=2$.

569.

On voit bien à quel point il eſt eſſentiel, dans tous les problêmes, de peſer avec attention toutes les circonſtances de la queſtion, afin d'en déduire une équation, en exprimant par des lettres les nombres cherchés ou inconnus. Tout l'art conſiſte enſuite à réſoudre ces équations pour en tirer les valeurs des nombres inconnus, & c'eſt de quoi nous nous occuperons dans cette ſection.

570.

Nous avons à remarquer d'abord une diverſité qui réſide dans les queſtions elles-

mêmes. Dans quelques-unes on ne cherche qu'une ſeule quantité inconnue, dans d'autres on en cherche deux ou pluſieurs ; & il faut obſerver dans ce dernier cas qu'il faut, pour les déterminer toutes, pouvoir déduire des circonſtances ou des conditions du problême, autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

571.

On a déjà pu s'appercevoir qu'une équation conſiſte en deux *membres* qu'on ſépare par le ſigne d'égalité, =, pour indiquer que ces deux quantités ſont égales l'une à l'autre. On eſt obligé ſouvent de faire ſubir bien des transformations à ces deux membres, afin d'en déduire la valeur de la quantité inconnue ; mais ces transformations cependant doivent toutes ſe fonder ſur ce que deux quantités égales reſtent égales, ſoit qu'on leur ajoute ou qu'on en retranche des quantités égales, ſoit qu'on les multiplie ou qu'on les diviſe par un même

nombre, soit qu'on les éleve toutes deux à la même puissance, ou qu'on en extraie les racines d'un même degré, soit enfin que l'on prenne les logarithmes de ces quantités, comme nous l'avons déjà pratiqué dans la section précédente.

572.

Les équations qu'on résout le plus facilement, sont celles où l'inconnue ne passe pas la premiere puissance après qu'on a mis les termes de l'équation en ordre, & on les appelle *équations du premier degré.* Mais lorsqu'ayant réduit & ordonné une équation, on y rencontre le quarré ou la seconde puissance de l'inconnue, on a une *équation du second degré*, qui est déjà plus difficile à résoudre. Ensuite viennent les *équations du troisieme degré*, qui renferment le cube de l'inconnue, & ainsi de suite. Nous traiterons de toutes dans cette section.

CHAPITRE II.

De la résolution des Equations du premier degré.

573.

LORSQUE le nombre cherché ou inconnu est indiqué par la lettre x, & que l'équation qu'on a obtenue est telle que l'un de ses membres renferme simplement cet x, & l'autre purement un nombre connu, comme, par exemple, $x = 25$, la valeur cherchée de x est toute trouvée. C'est donc à parvenir à une telle forme qu'il faut toujours faire ses efforts, quelque compliquée que soit l'équation qu'on a trouvée d'abord. Nous donnerons dans la suite les regles qui rendent ces réductions plus faciles.

574.

Commençons par les cas les plus simples, & supposons d'abord qu'on soit parvenu à

l'équation $x+9=16$, on voit ſur le champ que $x=7$. Et en général ſi on a trouvé $x+a=b$, où a & b ſignifient des nombres quelconques, mais connus, on n'a qu'à ſouſtraire a de l'un & de l'autre membre, & on obtient l'équation $x=b-a$, qui indique la valeur de x.

575.

Si l'équation trouvée eſt $x-a=b$, on ajoutera des deux côtés a, & on aura la valeur cherchée de $x=b+a$.

On procédera de même, ſi la premiere équation a cette forme, $x-a=aa+1$; car on aura ſur le champ $x=aa+a+1$.

Cette autre équation, $x-8a=20-6a$, donne $x=20-6a+8a$, ou $x=20+2a$.

Et celle-ci, $x+6a=20+3a$, donne $x=20+3a-6a$, ou $x=20-3a$.

576.

Si l'équation primitive a cette forme, $x-a+b=c$, on peut commencer par ajouter de part & d'autre a, on aura $x+b=c+a$;

& en soustrayant ensuite b des deux côtés, on trouvera $x=c+a-b$. Mais on peut aussi ajouter d'abord $+a-b$ de part & d'autre ; on obtient par-là sur le champ $x=c+a-b$.

Ainsi dans les exemples suivans

Si $x-2a+3b=0$, on a $x=2a-3b$.

Si $x-3a+2b=25+a+2b$, on a $x=25+4a$.

Si $x-9+6a=25+2a$, on a $x=34-4a$.

577.

Quand l'équation trouvée a la forme $ax=b$, on divise seulement les deux membres par a, & on a $x=\frac{b}{a}$ Mais si l'équation est de la forme $ax+b-c=d$, il faudra d'abord faire disparoître les termes qui accompagnent ax, en ajoutant de part & d'autre $-b+c$; & après cela, en divisant par a la nouvelle équation $ax=d-b+c$, on aura $x=\frac{d-b+c}{a}$.

On auroit trouvé la même chose en soustrayant $+b-c$ de l'équation donnée ; on

auroit eu pareillement $ax=d-b+c$, & $x=\frac{d-b+c}{a}$. En conſéquence de cela

Si $2x+5=17$, on a $2x=12$, & $x=6$.

Si $3x-8=7$, on a $3x=15$, & $x=5$.

Si $4x-5-3a=15+9a$, on a $4x=20+12a$, & par conſéquent $x=5+3a$.

578.

Quand la premiere équation aura la forme $\frac{x}{a}=b$, on multipliera des deux côtés par a, pour avoir $x=ab$.

Mais ſi l'on a $\frac{x}{a}+b-c=d$, il faudra d'abord faire $\frac{x}{a}=d-b+c$, après quoi on obtiendra $x=(d-b+c)a=ad-ab+ac$.

Soit $\frac{1}{2}x-3=4$, on a $\frac{1}{2}x=7$, & $x=14$.

Soit $\frac{1}{3}x-1+2a=3+a$, on aura $\frac{1}{3}x=4-a$, & $x=12-3a$.

Soit $\frac{x}{a-1}-1=a$, on aura $\frac{x}{a-1}=a+1$, & $x=aa-1$.

579.

Quand on eſt parvenu à une équation, comme $\frac{ax}{b}=c$, on multiplie d'abord par

b, afin d'avoir $ax = bc$, & diviſant enſuite par a, on trouve $x = \frac{bc}{a}$.

Que ſi $\frac{ax}{b} - c = d$, on commenceroit par donner à l'équation cette forme $\frac{ax}{b} = d + c$, après quoi on parviendroit à la valeur de $ax = bd + bc$, & à celle de $x = \frac{bd+bc}{a}$.

Suppoſons $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, nous aurons $\frac{2}{3}x = 5$, & $2x = 15$; donc $x = \frac{15}{2}$ ou $= 7\frac{1}{2}$.

Si $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, nous avons $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; donc $3x = 18$, & $x = 6$.

580.

Conſidérons à préſent le cas, qui peut arriver fréquemment, où deux ou pluſieurs termes contiennent la lettre x, ſoit dans un ſeul membre de l'équation, ſoit dans tous les deux.

Si ces termes ſont tous du même côté, c'eſt-à-dire dans un ſeul membre, comme dans l'équation $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, on a $x + \frac{1}{2}x = 6$, & $3x = 12$, & enfin $x = 4$.

Soit

Soit $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, & qu'on demande la valeur de x : si on multiplie d'abord par 3, on a $4x+\frac{3}{2}x=132$; multipliant ensuite par 2, on a $11x=264$; donc $x=24$. On auroit pu procéder plus briévement, en commençant par réduire les trois termes qui renferment x, au seul terme $\frac{11}{6}x$; & divisant ensuite par 11 l'équation $\frac{11}{6}x=44$, on auroit eu $\frac{1}{6}x=4$, donc $x=24$.

Soit $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=1$, on aura, en réduisant, $\frac{5}{12}x=1$, & $x=2\frac{2}{5}$.

Soit, plus généralement, $ax-bx+cx=d$, c'est comme si on avoit $(a-b+c)x=d$, d'où l'on tire $x=\frac{d}{a-b+c}$.

581.

Lorsqu'il se trouve des termes renfermant x dans l'un & l'autre membre de l'équation, on commencera par faire disparoître ces termes du côté où cela est plus facile, c'est-à-dire où il y en a le moins.

Si on a, par exemple, l'équation $3x+2=x+10$, il faudra souſtraire d'abord x des deux côtés, on aura $2x+2=10$; donc $2x=8$, & $x=4$.

Qu'on ait $x+4=20-x$, il eſt clair que $2x+4=20$; & par conſéquent $2x=16$, & $x=8$.

Soit $x+8=32-3x$, on aura $4x+8=32$; enſuite $4x=24$, & $x=6$.

Soit $15-x=20-2x$, on aura $15+x=20$, & $x=5$.

Soit $1+x=5-\frac{1}{2}x$, on aura $1+\frac{3}{2}x=5$; après cela $\frac{3}{2}x=4$; $3x=8$; enfin $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Si $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$, on ajoutera $\frac{1}{3}x$, cela donne $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}x$; ſouſtrayant $\frac{1}{3}$, il reſte $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6}$; & multipliant par 12, on obtient $x=2$.

Si $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, on ajoute $\frac{2}{3}x$, cela donne $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x$. Souſtrayant $\frac{1}{4}$, on a $\frac{7}{6}x=1\frac{1}{4}$, d'où l'on tire $x=1\frac{1}{14}=\frac{15}{14}$, en multipliant par 6, & en diviſant par 7.

582.

Si on eſt parvenu à une équation où le nombre inconnu x eſt un dénominateur, il faut faire diſparoître la fraction, en multipliant toute l'équation par ce dénominateur.

Suppoſons qu'on ait trouvé $\frac{100}{x} - 8 = 12$, on ajoutera d'abord 8, & on aura $\frac{100}{x} = 20$; multipliant enſuite par x, on a $100 = 20x$; & diviſant par 20, on trouve $x = 5$.

Soit $\frac{5x+3}{x-1} = 7$.

Si on multiplie par $x-1$, on a $5x+3=7x$ -7.

Souſtrayant $5x$, il reſte $3=2x-7$.

Ajoutant 7, il vient $2x=10$. Donc $x=5$.

583.

Quelquefois auſſi on rencontre des ſignes radicaux, & l'équation ne laiſſe pas d'appartenir au premier degré. Par exemple, on cherche un nombre x au-deſſous de 100, & tel que la racine quarrée de $100-x$ devienne égale à 8, ou $\sqrt{(100-x)}=8$,

on prendra des deux côtés le quarré $100 - x = 64$, & en ajoutant x on aura $100 = 64 + x$, d'où l'on tire $x = 100 - 64 = 36$.

On pourroit aussi, puisque $100 - x = 64$, soustraire 100 de l'un & de l'autre membre; on auroit $-x = -36$, & en multipliant par -1, $x = 36$.

584.

Quelquefois enfin le nombre inconnu x se trouve dans l'exposant, nous en avons vu des exemples plus haut, & il faut alors avoir recours aux logarithmes.

Ainsi, quand on a $2^x = 512$, on prend des deux côtés les logarithmes; on a $x\,L.\,2 = L.\,512$; & en divisant par L. 2, on trouve $x = \frac{L.\,512}{L.\,2}$. Les tables donneront donc

$$x = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = \frac{270927}{30103} \text{ ou } x = 9.$$

Soit $5 . 3^{2x} - 100 = 305$, on ajoutera 100; cela fait $5 . 3^{2x} = 405$; divisant par 5, on a $3^{2x} = 81$; prenant les logarithmes $2x\,L.\,3 = L.\,81$, & divisant par $2\,L.\,3$, on a $x = \frac{L.\,81}{2L.\,3}$ ou $x = \frac{L.\,81}{L.\,9}$; donc $x = \frac{1{,}9084850}{0{,}9542425}$ $= \frac{19084850}{9542425} = 2$.

CHAPITRE III.

De la solution de quelques questions relatives au Chapitre précédent.

585.

PREMIERE QUESTION. Partager 7 en deux parties, telles que la plus grande surpasse de 3 la plus petite.

Soit la plus grande partie $= x$, la plus petite sera $= 7 - x$; il faut donc que $x = 7 - x + 3$, ou $= 10 - x$; ajoutant x, on a $2x = 10$; & divisant par 2, le résultat est $x = 5$.

Réponse. La plus grande partie est 5, & la plus petite est 2.

Seconde question. On propose de partager a en deux parties, de façon que la plus grande surpasse de b la plus petite.

Soit la plus grande partie $= x$, l'autre sera $a - x$; ainsi $x = a - x + b$; ajoutant

x, on a $2x = a + b$; & diviſant par 2, $x = \frac{a+b}{2}$.

Autre ſolution. Soit la plus grande partie $= x$; comme elle eſt plus grande de b que la plus petite, il eſt clair que celle-ci eſt de b plus petite que l'autre, & $= x - b$. Or ces deux parties, priſes enſemble, doivent faire a; il faut donc que $2x - b = a$; ajoutant b, on a $2x = a + b$; donc $x = \frac{a+b}{2}$, c'eſt la valeur de la plus grande partie, & celle de la plus petite ſera $\frac{a+b}{2} - b$ ou $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$, ou $\frac{a-b}{2}$.

586.

Troiſieme queſtion. Un pere qui a trois fils, leur laiſſe 1600 écus. Le teſtament porte que l'aîné aura 200 écus de plus que le puîné, & que celui-ci aura 100 écus de plus que le cadet. On demande quelle ſera la portion de chacun?

Soit la portion du troiſieme fils $= x$; celle du ſecond ſera $= x + 100$, & celle du premier $= x + 300$. Or on ſait que ces trois

portions font enſemble 1600 écus. On a donc $3x + 400 = 1600$

$$3x = 1200$$

$$\& \; x = 400.$$

Réponſe. La part du cadet eſt 400 écus, celle du puîné eſt 500 écus, & celle de l'aîné eſt 700 écus.

587.

Quatrieme queſtion. Un pere laiſſe quatre fils & 8600 liv.; ſuivant le teſtament la part de l'aîné doit être double de celle du ſecond, moins 100 liv.; le ſecond doit recevoir trois fois autant que le troiſieme, moins 200 liv.; & le troiſieme doit recevoir quatre fois autant que le quatrieme, moins 300 l. On demande quelles ſont les portions de ces quatre fils? Nommons x la portion du cadet; celle du troiſieme fils ſera $= 4x - 300$; celle du ſecond $= 12x - 1100$, & celle de l'aîné $= 24x - 2300$. La ſomme de ces quatre parts doit faire 8600 liv. On a donc l'équation $41x - 3700 = 8600$, ou $41x = 12300$, & $x = 300$.

Réponse. Il revient au cadet 300 livres, au troisieme fils 900 livres, au second 2500 livres, & à l'aîné 4600 livres.

588.

Cinquieme question. Un homme laisse 11000 écus à partager entre sa veuve, deux fils & trois filles. Il veut que la mere reçoive deux fois la portion d'un fils, & qu'un fils reçoive deux fois autant qu'une fille. On demande combien il revient à ces personnes séparément?

Supposons la portion d'une fille $= x$, celle d'un fils est par conséquent $= 2x$, & celle de la veuve $= 4x$; tout l'héritage est donc $3x + 4x + 4x$; ainsi $11x = 11000$, & $x = 1000$.

Réponse. Une fille tire 1000 écus,
ainsi toutes les trois reçoivent 3000 écus.
Un fils tire 2000 écus,
ainsi les deux fils reçoivent 4000
La mere reçoit — — — — 4000

somme 11000 écus.

589.

Sixieme question. Un pere veut par son teſtament, que ſes trois fils partagent ſon bien de la maniere ſuivante : L'aîné reçoit 1000 écus de moins que la moitié de tout l'héritage, le ſecond reçoit 800 écus de moins que le tiers de tout le bien ; & le troiſieme reçoit 600 écus de moins que le quart du bien. On demande à quelle ſomme ſe monte l'héritage entier, & quelle eſt la part de chaque héritier ?

Exprimons l'héritage par x :

la part du premier fils eſt $\frac{1}{2}x - 1000$

celle du ſecond $\frac{1}{3}x - 800$

celle du troiſieme $\frac{1}{4}x - 600$

Ainſi les trois fils enſemble tirent $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, & cette ſomme doit être égale à x ; on a donc l'équation $\frac{13}{12}x - 2400 = x$.

Souſtrayant x, il reſte $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$.

Ajoutant 2400, on a $\frac{1}{12}x = 2400$. Multipliant enfin par 12, le produit eſt x égalant 28800.

Réponſe. L'héritage eſt de 28800 écus, &

l'aîné des fils reçoit	13400 écus.
le puîné — — — —	8800
le cadet — — — —	6600
tous trois enſemble	28800 écus.

590.

Septieme queſtion. Un pere laiſſe quatre fils, qui partagent ſon bien de la maniere qui ſuit:

Le premier prend la moitié de l'héritage, moins 3000 livres.

Le ſecond prend le tiers, moins 1000 l.

Le troiſieme prend exactement le quart du bien.

Le quatrieme prend 600 livres, & la cinquieme partie du bien.

De combien étoit l'héritage, & combien chaque fils a-t-il reçu?

Soit l'héritage total $= x$:

l'aîné des fils aura	$\frac{1}{2}x - 3000$
le puîné — — —	$\frac{1}{3}x - 1000$
le troisieme — —	$\frac{1}{4}x$
le cadet — — —	$\frac{1}{5}x + 600$

Tous les quatre auront reçu $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, ce qu'il faut égaler à x, d'où résulte l'équation $\frac{77}{60}x - 3400 = x$;

soustrayant x, on a $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$;

ajoutant 3400, on a $\frac{17}{60}x = 3400$;

divisant par 17, on a $\frac{1}{60}x = 200$;

multipliant par 60, on a $x = 12000$.

Réponse. L'héritage étoit de 12000 liv.

le premier fils en a pris	3000
le second — — — —	3000
le troisieme — — —	3000
le quatrieme — — —	3000

591.

Huitieme question. Trouver un nombre tel que, si on y ajoute sa moitié, la somme

surpasse 60 d'autant que le nombre lui-même est au-dessous de 65.

Soit ce nombre $=x$, il faut que $x+\frac{1}{2}x-60=65-x$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}x-60=65-x$;

ajoutant x, on a $\frac{5}{2}x-60=65$;

ajoutant 60, on a $\frac{5}{2}x=125$;

divisant par 5, on a $\frac{1}{2}x=25$;

multipliant par 2, on a $x=50$.

Réponse. Le nombre cherché est 50.

592.

Neuvieme question. Partager 32 en deux parties telles que, si je divise la moindre par 6, & la plus grande par 5, les deux quotiens pris ensemble fassent 6.

Soit la plus petite des deux parties cherchées $=x$; la plus grande sera $=32-x$; la premiere, divisée par 6, donne $\frac{x}{6}$; la seconde, divisée par 5, donne $\frac{32-x}{5}$; or il faut que $\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$. Ainsi multipliant par 5, on a $\frac{5}{6}x+32-x=30$, ou $-\frac{1}{6}x+32=30$.

ajoutant $\frac{1}{6}x$, il vient $32=30+\frac{1}{6}x$;
foustrayant 30, il reste $2=\frac{1}{6}x$;
multipliant par 6, on a $x=12$.

Réponse. Les deux parties sont : la plus petite $=12$; la plus grande $=20$.

593.

Dixieme question. Trouver un nombre tel que, si je le multiplie par 5, le produit soit autant au-dessous de 40, que le nombre lui-même est au-dessous de 12. Je nommerai ce nombre x, il est au-dessous de 12 de $12-x$; prenant le nombre x cinq fois, j'ai $5x$, ce qui est moindre que 40 de $40-5x$; & cette quantité doit être égale à $12-x$.

J'ai donc $40-5x=12-x$;
ajoutant $5x$, j'ai $40=12+4x$;
foustrayant 12, j'ai $28=4x$;
divisant par 4, j'ai $x=7$, nombre cherché.

594.

Onzieme Question. Partager 25 en deux parties, telles que la plus grande contienne 49 fois la plus petite.

Soit cette derniere $=x$, la plus grande sera $=25-x$. Celle-ci divisée par celle-là doit donner le quotient 49 ; on a donc $\frac{25-x}{x}=49$.

Multipliant par x, on a $25-x=49x$;
ajoutant x, — — — $25=50x$;
Divisant par 50, — — $x=\frac{1}{2}$.

Réponse. La plus petite des deux parties cherchées est $\frac{1}{2}$, & la plus grande est $24\frac{1}{2}$; divisant celle-ci par $\frac{1}{2}$, ou multipliant par 2, on trouve 49.

595.

Douzieme question. Partager 48 en neuf parties, de façon que l'une soit toujours de $\frac{1}{2}$ plus grande que la précédente.

Soit la premiere & la plus petite partie $=x$, la seconde sera $=x+\frac{1}{2}$, la troisieme $=x+1$, &c.

Or ces parties formant une progreſſion arithmétique, dont le premier terme $=x$, le neuvieme & dernier terme ſera $=x+4$. Ajoutant ces deux termes enſemble, on a $2x+4$; multipliant cette quantité par le nombre des termes, ou par 9, on a $18x+36$; & diviſant ce produit par 2, on obtient la ſomme de toutes les neuf parties $=9x+18$, & qui doit équivaloir à 48. On a donc $9x+18=48$;

ſouſtrayant 18, il reſte $9x=30$;

& diviſant par 9 on a $x=3\frac{1}{3}$.

Réponſe. La premiere partie eſt $3\frac{1}{3}$, & les neuf parties ſe ſuivent dans l'ordre que voici :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3\frac{1}{3}$	$+3\frac{5}{6}$	$+4\frac{1}{3}$	$+4\frac{5}{6}$	$+5\frac{1}{3}$	$+5\frac{5}{6}$	$+6\frac{1}{3}$	$+6\frac{5}{6}$	$+7\frac{1}{3}$.

Toutes enſemble font 48.

596.

Treizieme queſtion. Trouver une progreſſion arithmétique, dont le premier terme $=5$, le dernier $=10$, & la ſomme $=60$.

Nous ne connoissons ici ni la différence ni le nombre des termes, mais nous savons que le premier & le dernier terme nous suffiroient pour exprimer la somme de la progression, si seulement le nombre des termes étoit donné. Nous supposerons donc ce nombre $=x$, & la somme de la progression s'exprimera par $\frac{15x}{2}$; or nous savons d'ailleurs que cette somme est 60; ainsi

$$\frac{15x}{2}=60;\ \frac{1}{2}x=4,\ \&\ x=8.$$

Maintenant, puisque le nombre des termes est 8, si nous supposons la différence $=z$, il ne s'agit plus que de chercher le huitieme terme dans cette supposition, & de le faire $=10$. Le second terme est $5+z$; le troisieme est $5+2z$, & le huitieme est $5+7z$, ainsi

$$5+7z=10$$
$$7z=5$$
$$\&\ z=\frac{5}{7}.$$

Réponse. La différence de la progression est $\frac{5}{7}$, & le nombre des termes est 8, & par conséquent la progression est

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5+ & 5\frac{5}{7}+ & 6\frac{3}{7}+ & 7\frac{1}{7}+ & 7\frac{6}{7}+ & 8\frac{4}{7}+ & 9\frac{2}{7}+ & 10, \end{array}$$

dont la ſomme $=60$.

597.

Quatorzieme queſtion. Je cherche un nombre tel, que ſi du double de ce nombre je ſouſtrais 1, & que je double le reſte, qu'enſuite je ſouſtraie 2, & que je diviſe le reſte par 4, le nombre réſultant de ces opérations ſoit de 1 plus petit que le nombre cherché.

Je ſuppoſerai ce nombre $= x$; le double eſt $2x$; ſouſtrayant 1, il reſte $2x-1$; doublant ceci, j'ai $4x-2$; ſouſtrayant 2, il me reſte $4x-4$; diviſant par 4, il me vient $x-1$; & c'eſt ce qui doit être d'une unité plus petit que x; ainſi

$$x-1=x-1.$$

Mais voilà ce qu'on nomme une *équation identique*; elle indique que x n'eſt pas du tout déterminé, & qu'on peut prendre à ſa place un nombre quelconque à volonté.

598.

Quinzieme question. J'ai acheté quelques aunes de drap à raiſon de 7 écus pour 5 aunes, j'ai revendu de ce drap à raiſon de 11 écus pour 7 aunes, & j'ai gagné 100 écus ſur le tout : on demande combien il y avoit de drap ?

Suppoſons qu'il y en ait eu x aunes ; il faudra voir d'abord combien l'emplette a coûté ; cela ſe trouve par la regle de trois ſuivante :

Cinq aunes coûtent 7 écus ; que coûtent x aunes ? *Réponſe*, $\frac{7}{5}x$ écus.

Voilà ma dépenſe. Voyons à préſent quelle eſt ma recette ; il faudra faire la regle de trois qui ſuit : Sept aunes me valent 11 écus, combien me rapportent x aunes ? *Rép.* $\frac{11}{7}x$ écus.

Cette recette doit ſurpaſſer de 100 écus la dépenſe ; on a donc cette équation :

$\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$;

ſouſtrayant $\frac{7}{5}x$, il reſte $\frac{6}{35}x = 100$;

donc $6x = 3500$, & $x = 583\frac{1}{3}$.

Réponse. Il y avoit $583\frac{1}{3}$ aunes, qui ont été achetées pour $816\frac{2}{3}$ écus, & revendues ensuite pour $916\frac{2}{3}$ écus, moyennant quoi le profit a été de 100 écus.

599.

Seizieme question. Quelqu'un achete 12 pieces de drap pour 140 écus. Deux sont blanches, trois sont noires & sept sont bleues. Une piece de drap noir coûte deux écus de plus qu'une piece de drap blanc, & une piece de drap bleu coûte trois écus de plus qu'une noire ; on demande le prix de chaque sorte.

Supposez qu'une piece blanche coûte x écus, les deux de cette sorte coûteront $2x$. De plus une piece noire coûtant $x+2$, les trois pieces de cette couleur coûteront $3x+6$. Enfin une piece bleue coûte $x+5$; donc les sept bleues coûtent $7x+35$. Ainsi toutes les douze pieces reviennent ensemble à $12x+41$.

Or le prix réel & connu de ces douze pieces est 140 écus; on a donc $12x+41=140$,

& $12x=99$;

donc $x=8\frac{1}{4}$;

ainsi une piece de drap blanc coûte $8\frac{1}{4}$ écus.

drap noir $10\frac{1}{4}$

drap bleu $13\frac{1}{4}$

600.

Dix-septieme question. Un homme qui a acheté des noix muscades, dit que trois noix lui coûtent autant au-delà d'un sou que quatre lui coûtent au-delà de dix liards: on demande le prix de ces noix?

On nommera x l'argent que trois noix coûtent de plus qu'un sou ou quatre liards, & on dira : trois noix coûtent $x+4$ liards, & quatre coûteront, par la condition du problême, $x+10$ liards. Or le prix de trois noix donne celui de quatre noix encore d'une autre maniere, savoir par la

regle de trois; on fera $3 : x + 4 = 4$. *Réponse*, $\frac{4x+16}{3}$. Ainsi $\frac{4x+16}{3} = x + 10$, ou $4x + 16 = 3x + 30$;

donc $x + 16 = 30$,

& $x = 14$.

Réponse. Trois noix coûtent 18 liards, & quatre coûtent 6 sous; donc chacune coûte 6 liards.

601.

Dix-huitieme question. Quelqu'un a deux gobelets d'argent avec un seul couvercle pour les deux. Le premier gobelet pese 12 onces, & si on y met le couvercle, il pese deux fois plus que l'autre gobelet; mais si on couvre l'autre gobelet, celui-ci pese trois fois plus que le premier : il s'agit de trouver le poids du second gobelet & celui du couvercle.

Supposons le poids du couvercle $= x$ onces; le premier gobelet étant couvert pesera $x + 12$ onces. Or ce poids étant le double de celui du second gobelet, il faut

que ce gobelet-ci pese $\frac{1}{2}x+6$. Si on le couvre, il pesera $\frac{3}{2}x+6$, & ce poids doit être le triple de 12, ou du poids du premier gobelet. On aura donc l'équation $\frac{3}{2}x+6=36$, ou $\frac{3}{2}x=30$; donc $\frac{1}{2}x=10$ & $x=20$.

Réponse. Le couvercle pese 20 onces, & le second gobelet pese 16 onces.

602.

Dix-neuvieme question. Un Banquier a deux especes de monnoie; il faut a pieces de la premiere pour faire un écu; il faut b pieces de la seconde pour faire la même somme. Quelqu'un vient & demande c pieces pour 1 écu; combien le Banquier lui donnera-t-il de pieces de chaque espece pour le satisfaire?

Supposons que le Banquier donne x pieces de la premiere espece; il est clair qu'il donnera $c-x$ pieces de l'autre espece. Or les x pieces de la premiere valent $\frac{x}{a}$ écu

par la proportion $a:1 = x:\frac{x}{a}$; & les $c - x$ pieces de la feconde efpece valent $\frac{c-x}{b}$ écu, parce qu'on a $b:1 = c - x:\frac{c-x}{b}$. Il faut donc que $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, ou $\frac{bx}{a} + c - x = b$, ou $bx + ac - ax = ab$, ou bien $bx - ax = ab - ac$; d'où l'on tire $x = \frac{ab-ac}{b-a}$, ou $x = \frac{a(b-c)}{b-a}$. Par conféquent $c - x = \frac{bc-ab}{b-a} = \frac{b(c-a)}{b-a}$.

Réponfe. Le Banquier donnera $\frac{a(b-c)}{b-a}$ pieces de la premiere efpece, & $\frac{b(c-a)}{b-a}$ pieces de la feconde efpece.

Remarque. Ces deux nombres fe trouvent facilement par la regle de trois, lorfqu'il s'agit de faire une application de nos réfultats. On dira, pour trouver le premier: $b - a:b - c = a:\frac{ab-ac}{b-a}$. Le fecond nombre fe détermine en faifant: $b - a:c - a = b:\frac{bc-ab}{b-a}$.

Il faut remarquer auffi que a eft plus petit que b, & que c eft pareillement plus petit que b, mais cependant plus grand que a, ainfi que la nature de la chofe le demande.

603.

Vingtieme question. Un Banquier a deux sortes de monnoie : dix pieces de l'une font un écu, & il faut 20 pieces de l'autre pour faire un écu. Or quelqu'un demande à changer un écu contre dix-sept pieces de monnoie ; combien recevra-t-il donc de pieces de chaque sorte ?

Nous avons ici $a=10$, $b=20$, & $c=17$; ce qui fournit les regles de trois suivantes :

I. $10:3=10:3$, ainsi 3 pieces de la premiere sorte.

II. $10:7=20:14$, & 14 pieces de la seconde sorte.

604.

Vingt-unieme question. Un pere laisse à sa mort quelques enfans, avec un bien qu'ils partagent de la maniere suivante :

Le premier reçoit cent écus & la dixieme partie du reste.

Le second tire deux cents écus & la dixieme partie de ce qui reste.

Le troisieme prend trois cents écus & la dixieme partie de ce qui reste.

Le quatrieme prend quatre cents écus & la dixieme partie de ce qui reste, & ainsi de suite.

Et il se trouve à la fin, que le bien a été partagé également entre tous les enfans. On demande maintenant de combien étoit l'héritage, combien il y avoit d'enfans, & combien chacun a reçu?

Cette question est d'une nature toute particuliere, & mérite par-là qu'on y fasse attention. Pour la résoudre plus facilement, nous supposerons l'héritage total $=z$ écus; & puisque tous les enfans tirent une même somme, soit cette portion d'un chacun $=x$, moyennant quoi le nombre des enfans s'exprime par $\frac{z}{x}$. Cela posé, voici comment nous nous y prendrons pour résoudre la question proposée.

La Masse ou le bien à partager.	Ordre des Enfans.	Portion de chacun.	Différences.
z	le 1.[r]	$x=100+\frac{z-100}{10}$	
$z-x$	le 2.[d]	$x=200+\frac{z-x-200}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-2x$	le 3.[e]	$x=300+\frac{z-2x-300}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-3x$	le 4.[e]	$x=400+\frac{z-3x-400}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-4x$	le 5.[e]	$x=500+\frac{z-4x-500}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-5x$	le 6.[e]	$x=600+\frac{z-5x-600}{10}$	& ainsi de suite.

Nous avons inféré dans la derniere colonne les différences qu'on obtient en soustrayant chaque portion de la suivante. Or toutes les portions étant égales, il faut que chacune de ces différences soit $=0$. Et comme il arrive heureusement qu'une même expression a lieu pour toutes ces différences, il suffira d'en égaler une seule à zéro, & on aura donc l'équation $100-\frac{x-100}{10}=0$. Multipliant par 10, on a $1000-x-100=0$, ou $900-x=0$; par conséquent $x=900$.

Nous savons donc déjà que la part de chaque enfant étoit 900 écus ; ainsi en prenant à présent à volonté une des équations de la troisieme colonne, par exemple la premiere, elle devient, en substituant à x sa valeur, $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$, d'où l'on tire z sur le champ ; car on a $9000 = 1000 + z - 100$, ou $9000 = 900 + z$; donc $z = 8100$; & par conséquent $\frac{z}{x} = 9$.

Réponse. Ainsi le nombre des enfans $= 9$; l'héritage laissé par le pere $= 8100$ écus ; & la portion de chaque enfant $= 900$ écus.

CHAPITRE IV.

De la résolution de deux ou de plusieurs Equations du premier degré.

605.

Il arrive souvent qu'on est obligé de faire entrer dans le calcul deux ou plusieurs de ces nombres inconnus, représentés par les

lettres x, y, z, &c. & si la question est déterminée, on parvient dans ce cas-là à autant d'équations, desquelles il s'agit ensuite de tirer les inconnues. Comme nous ne considérons encore que les équations qui ne contiennent pas des puissances d'une inconnue plus élevées que la premiere, ni des produits de deux ou de plusieurs inconnues, on voit que ces équations auront toutes la forme $az+by+cx=d$.

606.

Commençant donc par deux équations, nous chercherons à en tirer les valeurs de x & y; & pour traiter ce cas d'une maniere générale, soient les deux équations: I. $ax+by=c$, & II. $fx+gy=h$, où a, b, c & f, g, h signifient des nombres connus. Il s'agit donc ici de tirer de ces deux équations, les deux inconnues x & y.

607.

La voie la plus naturelle pour y parvenir se présente aisément à l'esprit; c'est de

déterminer par l'une & l'autre équation la valeur d'une des inconnues, par exemple, de x, & de considérer ensuite l'égalité de ces deux valeurs ; car on aura une équation, dans laquelle l'inconnue y se trouvera seule & pourra être déterminée par les regles que nous avons données plus haut. Connoissant donc alors y, on n'aura plus qu'à substituer sa valeur dans une des quantités qui exprimoient x.

608.

D'après cette regle, nous tirons de la premiere équation : $x = \frac{c-by}{a}$, & de la seconde, $x = \frac{h-gy}{f}$; posant ces deux valeurs égales l'une à l'autre, nous avons cette nouvelle équation :

$$\frac{c-by}{a} = \frac{h-gy}{f} ;$$

multipliant par a, le produit est $c - by$

$$= \frac{ah-agy}{f} ;$$

multipliant par f, le produit est $fc - fby$

$$= ah - agy .$$

ajoutant agy, on a $fc - fby + agy = ah$; ſouſtrayant fc, il reſte $- fby + agy = ah - fc$;

$$\text{ou bien } (ag - bf)y = ah - fc\,;$$

diviſant enfin par $ag - bf$, nous avons $y = \frac{ah - fc}{ag - bf}$.

Pour ſubſtituer donc à préſent cette valeur de y dans une des deux valeurs que nous avons trouvées pour x, comme dans la premiere $x = \frac{c - by}{a}$, nous aurons d'abord $- by = - \frac{abh + bcf}{ag - bf}$; de là $c - by = c - \frac{abh + bcf}{ag - bf}$ ou $c - by = \frac{acg - bcf - abh + bcf}{ag - bf} = \frac{acg - abh}{ag - bf}$; & diviſant par a, $x = \frac{c - by}{a} = \frac{cg - bh}{ag - bf}$.

609.

Premiere queſtion. Pour éclaircir cette méthode par des exemples, ſoit propoſé de trouver deux nombres, dont la ſomme ſoit $= 15$, & la différence $= 7$.

Nommons x le nombre qui eſt le plus grand, & y le plus petit. Nous aurons

$$\text{I.) } x + y = 15, \text{ \& II.) } x - y = 7.$$

La premiere équation donne $x=15-y$, & la seconde donne $x=7+y$; de là résulte la nouvelle équation $15-y=7+y$. Ainsi $15=7+2y$; $2y=8$, & $y=4$; au moyen de quoi on trouve $x=11$.

Réponse. Le plus petit nombre est 4, & le plus grand est 11.

610.

Seconde question. On peut aussi généraliser la question précédente, en cherchant deux nombres, dont la somme soit $=a$, & la différence $=b$.

Soit le plus grand des deux $=x$, & le plus petit $=y$.

On aura I.) $x+y=a$, & II.) $x-y=b$; la premiere équation donne $x=a-y$; la seconde — — — — — — $x=b+y$. Donc $a-y=b+y$; $a=b+2y$; $2y=a-b$; enfin $y=\frac{a-b}{2}$, & par conséquent $x=a-y$ $=a-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$.

Réponse. Le plus grand nombre, où x est $=\frac{a+b}{2}$; & le plus petit, où y est $=\frac{a-b}{2}$,

ou, ce qui revient au même, $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; & de là résulte le théoreme suivant : Quand la somme de deux nombres quelconques est a, & que la différence de ces deux nombres est b, le plus grand des deux nombres est égal à la moitié de la somme *plus* la moitié de la différence ; & le plus petit des deux nombres est égal à la somme *moins* la moitié de la différence.

611.

On peut aussi résoudre la même question de la maniere qui suit :

Puisque les deux équations sont, $x+y=a$, & $x-y=b$.

Si on les ajoute l'une avec l'autre, on a $2x=a+b$.

Donc $x=\frac{a+b}{2}$.

Ensuite, soustrayant les mêmes équations l'une de l'autre, on a $2y=a-b$; donc $y=\frac{a-b}{2}$.

612.

612.

Troisieme question. Un mulet & un âne portent des charges de quelques quintaux. L'âne se plaint de la sienne & dit au mulet : Il ne me manque que de porter encore un quintal de ta charge, pour être plus chargé que toi du double. Le mulet répond : Oui, mais si tu me donnois un quintal de la tienne, je serois trois fois plus chargé que toi. On demande combien de quintaux ils portoient chacun ?

Supposons la charge du mulet de x quintaux, & celle de l'âne de y quintaux. Si le mulet donne à l'âne un quintal, celui-ci aura $y+1$, & il restera à l'autre $x-1$; & puisque dans ce cas l'âne est deux fois plus chargé que le mulet, on a $y+1=2x-2$.

Mais si l'âne donne un quintal au mulet, celui-ci a $x+1$, & l'âne garde $y-1$; & la charge du premier étant maintenant triple de celle du second, on a $x+1=3y-3$.

Nos deux équations seront par conséquent

I.) $y+1=2x-2$, II.) $x+1=3y-3$.

La premiere donne $x=\frac{y+3}{2}$, & la seconde donne $x=3y-4$; de là résulte la nouvelle équation $\frac{y+3}{2}=3y-4$, qui donne $y=\frac{11}{5}$, & au moyen de quoi on détermine aussi la valeur de x, qui devient $=2\frac{3}{5}$.

Réponse. Le mulet portoit $2\frac{3}{5}$ quintaux, & l'âne portoit $2\frac{1}{5}$ quintaux.

613.

Lorsqu'on a trois nombres inconnus, & autant d'équations, comme, par exemple, I.) $x+y-z=8$, II.) $x+z-y=9$, III.) $y+z-x=10$, on commencera, comme auparavant, par tirer de chacune la valeur de x, & on aura par la I.^e) $x=8+z-y$; par la IIe) $x=9+y-z$, & par la IIIe) $x=y+z-10$.

Comparant maintenant la premiere de ces valeurs avec la seconde, & après cela

aussi avec la troisieme, on aura les équations suivantes :

I.) $8+z-y=9+y-z$, II.) $8+z-y=y+z-10$.

Or la premiere donne $2z-2y=1$, & la seconde donne $2y=18$, ou $y=9$; si donc on substitue cette valeur de y dans $2z-2y=1$, on a $2z-18=1$, & $2z=19$, ainsi $z=9\frac{1}{2}$; il ne reste donc que x à déterminer, & on le trouve facilement $=8\frac{1}{2}$.

Il est arrivé ici par hasard que la lettre z s'est éliminée dans la derniere équation, & qu'on a trouvé la valeur de y immédiatement. Si ce cas n'avoit pas eu lieu, on auroit eu deux équations entre z & y, qu'il auroit fallu résoudre par la regle précédente.

614.

Qu'on ait trouvé les trois équations suivantes :

I.) $3x+5y-4z=25$, II.) $5x-2y+3z=46$, III.) $3y+5z-x=62$.

Si on tire de chacune la valeur de x, on a

$$\text{I.})\ x=\frac{25-5y+4z}{3},\ \text{II.})\ x=\frac{46+2y-3z}{5},$$
$$\text{III.})\ x=3y+5z-62.$$

Comparant à préfent ces trois valeurs entr'elles, & d'abord la troifieme avec la premiere, on a $3y+5z-62=\frac{25-5y+4z}{3}$; multipliant par 3, $9y+15z-186=25-5y+4z$; ainfi $9y+15z=211-5y+4z$, & $14y+11z=211$ par la premiere & la troifiéme. Comparant auffi la troifieme avec la feconde, on a $3y+5z-62=\frac{46+2y-3z}{5}$, ou $46+2y-3z=15y+25z-310$, ce qui fe réduit à $356=13y+28z$.

On tirera maintenant de ces deux nouvelles équations la valeur de y:

$\text{I.})\ 211=14y+11z$; donc $14y=211-11z$

$$\&\ y=\frac{211-11z}{14}.$$

$\text{II.})\ 356=13y+28z$; donc $13y=356-28z$,

$$\&\ y=\frac{356-28z}{13}.$$

Ces deux valeurs forment la nouvelle équation $\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13}$, laquelle fe change

en celle-ci, $2743-143z=4984-392z$, qui se réduit à $249z=2241$, & d'où l'on tire $z=9$.

Cette valeur étant substituée dans une des deux équations de y & z, on trouve $y=9$, & enfin une substitution semblable dans une des trois valeurs de x, donnera $x=7$.

615.

Si on avoit plus de trois inconnues à déterminer, & autant d'équations à résoudre, on pourroit s'y prendre de la même maniere; mais on se trouveroit engagé le plus souvent dans des calculs fort prolixes.

Il est donc à propos de remarquer que dans chaque cas particulier on ne manque guere de rencontrer des moyens qui en facilitent beaucoup la résolution. Ces moyens sont d'introduire dans le calcul, à côté des inconnues principales, une nouvelle inconnue arbitraire, telle qu'est, par ex. la somme de toutes les autres; & quand on est un

peu versé dans ces sortes de calculs, on juge assez facilement ce qu'il est le plus convenable de faire (*). Nous allons rapporter quelques exemples qui peuvent guider dans l'application de cette méthode.

616.

Quatrieme question. Trois personnes jouent ensemble; dans la premiere partie le premier Joueur perd avec chacun des deux autres autant que chacun d'eux avoit d'argent sur lui. Dans la seconde partie, c'est au second Joueur que les deux autres gagnent autant chacun qu'ils ont déjà d'argent. Dans la troisieme partie enfin, le premier & le second Joueur gagnent au troisieme autant d'argent chacun, qu'ils en avoient. Ils cessent alors de jouer, & il se

(*) M. *Cramer* a donné à la fin de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, une très-belle regle pour déterminer immédiatement, & sans passer par les opérations ordinaires, la valeur des inconnues de ces sortes d'équations, en quelque nombre que soient ces inconnues.

trouve qu'ils ont tous une ſomme égale, ſavoir vingt-quatre louis chacun. On demande avec combien d'argent chacun s'eſt mis au jeu ?

Suppoſons que l'enjeu du premier Joueur ait été de x louis, celui du ſecond, y, & celui du troiſieme, z. Et faiſons outre cela la ſomme de tous les enjeux, ou $x+y+z=s$. Or le premier Joueur perdant dans la premiere partie autant d'argent qu'en ont les deux autres, il perd $s-x$; (car lui-même ayant eu x, les deux autres auront eu $s-x$) ; donc il lui reſtera $2x-s$, le ſecond aura $2y$, & le troiſieme aura $2z$.

Voici donc ce que chacun aura après la premiere partie : le I.) $2x-s$, le II.) $2y$, le III.) $2z$.

Dans la ſeconde partie, le ſecond Joueur qui a maintenant $2y$, perd autant d'argent qu'en ont les deux autres, c'eſt-à-d. $s-2y$; il lui reſte par conſéquent $4y-s$. Quant aux autres, ils auront le double chacun de ce qu'ils avoient ; ainſi après la ſeconde

partie les trois Joueurs ont, le I.) $4x - 2f$, le II.) $4y - f$, le III.) $4z$.

Dans la troisieme partie, c'est le troisieme Joueur, lequel a actuellement $4z$, qui est le perdant; il perd avec le premier $4x - 2f$, & avec le second $4y - f$; par conséquent après cette partie nos trois Joueurs auront :

le I.) $8x - 4f$, le II.) $8y - 2f$, le III.) $8z - f$.

Or chacun ayant maintenant 24 louis, nous avons trois équations, telles que la première donne sur le champ x, la seconde y, & la troisieme z; de plus f est connu & $= 72$, puisque les trois Joueurs ensemble ont 72 louis à la fin de la derniere partie; mais c'est à quoi il n'est pas même nécessaire de faire attention d'abord, comme on va le voir. Nous avons

I.) $8x - 4f = 24$, ou $8x = 24 + 4f$, ou $x = 3 + \frac{1}{2}f$;

II.) $8y - 2f = 24$, ou $8y = 24 + 2f$, ou $y = 3 + \frac{1}{4}f$;

III.) $8z - f = 24$, ou $8z = 24 + f$, ou $z = 3 + \frac{1}{8}f$.

Ajoutant ces trois valeurs, on a

$$x+y+z=9+\tfrac{7}{8}s.$$

Ainsi, puisque $x+y+z=s$, on a $s=9+\frac{7}{8}s$; donc $\frac{1}{8}s=9$, & $s=72$.

Si on substitue à présent cette valeur de s dans les expressions trouvées pour x, y & z, on trouvera qu'avant que de se mettre au jeu, le premier Joueur avoit 39 louis; le second, 21 louis; & le troisieme, 12 louis.

On voit par cette solution comment, par le secours de la somme des trois inconnues, on surmonte heureusement les obstacles qui se présentent dans la voie ordinaire.

617.

Quoique la question précédente paroisse d'abord assez difficile, nous remarquerons cependant qu'on peut la résoudre, même sans algebre. On n'a qu'à chercher à le faire en rétrogradant. On considérera que puisque les Joueurs, en quittant le jeu,

avoient chacun 24 louis, & que dans la troisieme partie, le premier & le second ont doublé leur argent, ils doivent avoir eu avant cette derniere partie :

le I.) 12, le II.) 12, & le III.) 48.

Dans la seconde partie ce sont le premier & le troisieme qui ont doublé leur argent; donc avant cette partie ils avoient :

le I.) 6, le II.) 42, le III.) 24.

Enfin, dans la premiere partie, le second & le troisieme Joueur ont gagné chacun autant d'argent qu'il en avoit sorti; donc en commençant les trois Joueurs avoient devant eux :

I.) 39, II.) 21, III.) 12.

Ce que nous avons aussi trouvé par la solution précédente.

618.

Cinquieme question. Deux personnes doivent 29 pistoles; elles ont de l'argent toutes les deux, mais pas autant chacune pour pouvoir acquitter seule cette dette com-

mune ; le premier Débiteur dit donc au fecond : Si vous me donnez les $\frac{2}{3}$ de votre argent, je payerai feul la dette fur le champ. Le fecond lui réplique qu'il pourroit auffi acquitter feul la dette, fi l'autre lui donnoit les $\frac{3}{4}$ de fon argent. On demande combien ils ont l'un & l'autre ?

Suppofons que le premier ait x piftoles, & que le fecond ait y piftoles.

Nous aurons d'abord $x + \frac{2}{3}y = 29$;

Enfuite auffi, $y + \frac{3}{4}x = 29$.

La premiere équation donne $x = 29 - \frac{2}{3}y$, & la feconde donne $x = \frac{116-4y}{3}$; ainfi $29 - \frac{2}{3}y = \frac{116-4y}{3}$. On tire de cette équation $y = 14\frac{1}{2}$; donc $x = 19\frac{1}{3}$.

Réponfe. Le premier Débiteur a $19\frac{1}{3}$ piftoles, & le fecond a $14\frac{1}{2}$ piftoles.

619.

Sixieme queftion. Trois freres ont acheté une vigne pour cent louis. Le cadet dit

qu'il pourroit la payer seul, si le second lui donnoit la moitié de l'argent qu'il a; le second dit que si l'aîné lui donnoit le tiers seulement de son argent, il payeroit la vigne seul; enfin l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet, pour payer seul la vigne. Combien chacun avoit-il d'argent? Que le premier ait eu x louis; le second, y louis; le troisieme, z louis; on aura les trois équations suivantes: I.) $x+\frac{1}{2}y=100$. II.) $y+\frac{1}{3}z=100$. III.) $z+\frac{1}{4}x=100$; deux desquelles seulement donnent la valeur de x, savoir I.) $x=100-\frac{1}{2}y$, III.) $x=400-4z$. Ainsi on a l'équation:

$100-\frac{1}{2}y=400-4z$, ou $4z-\frac{1}{2}y=300$, qu'il faudra combiner avec la seconde, afin de déterminer y & z. Or la seconde équation étoit $y+\frac{1}{3}z=100$; on en tire donc $y=100-\frac{1}{3}z$; & l'équation trouvée en dernier lieu étant $4z-\frac{1}{2}y=300$, on a $y=8z-600$. Par conséquent la derniere équation est:

$100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$; ainsi $8\frac{1}{3}z = 700$, ou $\frac{25}{3}z = 700$, & $z = 84$. Donc $y = 100 - 28 = 72$, & $x = 64$.

Réponse. Le cadet avoit 64 louis, le puîné avoit 72 louis, & l'aîné avoit 84 louis.

620.

Comme dans cet exemple chaque équation ne renferme que deux inconnues, on peut parvenir d'une façon plus commode à la solution cherchée.

La premiere équation donne $y = 200 - 2x$; ainsi y est déterminé en x; & si on substitue cette valeur dans la seconde équation, on a $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$; donc $\frac{1}{3}z = 2x - 100$, & $z = 6x - 300$.

Ainsi z est aussi déterminé en x; & si on introduit cette valeur dans la troisieme équation, on obtient $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, où x se trouve seul & qu'on réduit à $25x - 1600 = 0$, d'où l'on tire $x = 64$. Par conséquent $y = 200 - 128 = 72$, & $z = 384 - 300 = 84$.

621.

On peut ſuivre le même procédé, lorſqu'on a un plus grand nombre d'équations. Suppoſons, par exemple, qu'on ait d'une maniere générale : I.) $u + \frac{x}{a} = n$, II.) $x + \frac{y}{b} = n$, III.) $y + \frac{z}{c} = n$, IV.) $z + \frac{u}{d} = n$; ou, en chaſſant les fractions : I.) $au + x = an$, II.) $bx + y = bn$, III.) $cy + z = cn$, IV.) $dz + u = dn$.

Ici la premiere équation donne d'abord $x = an - au$, & cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde, on a $abn - abu + y = bn$; ainſi $y = bn - abn + abu$; la ſubſtitution de cette valeur dans la troiſieme équation donne $bcn - abcn + abcu + z = cn$; donc $z = cn - bcn + abcn - abcu$; ſubſtituant enfin ceci dans la quatrieme équation, on a $cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn$. Ainſi $dn - cdn + bcdn - abcdn = - abcdu + u$, ou bien $(abcd - 1)\, u = abcdn - bcdn + cdn - dn$; d'où l'on tire $u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = \frac{n\,(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$.

Par conſéquent on aura

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}.$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}.$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}.$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

622.

Septieme queſtion. Un Capitaine a trois compagnies : l'une eſt de Suiſſes, l'autre eſt de Suabes, la troiſieme eſt de Saxons. Il veut donner un aſſaut avec une partie de ces troupes, & il promet une récompenſe de 901 écus ſur le pied ſuivant :

Que chaque Soldat de la compagnie qui montera à l'aſſaut, recevra 1 écu, & que le reſte de l'argent ſera diſtribué également aux deux autres compagnies.

Or il ſe trouve que ſi les Suiſſes donnent l'aſſaut, chaque Soldat des autres compagnies reçoit un demi-écu ; que ſi les Suabes vont à l'aſſaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{3}$ écu ; enfin, que ſi les Saxons donnent

l'assaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{4}$ écu. On demande de combien d'hommes étoit chaque compagnie.

Supposons le nombre des Suisses $= x$, celui des Suabes $= y$, & celui des Saxons $= z$. Et faisons de plus $x + y + z = s$, parce qu'il est facile de voir que c'est le moyen d'abréger considérablement le calcul. Si donc les Suisses donnent l'assaut, leur nombre étant $= x$, celui des autres sera $s - x$; or ceux-là reçoivent 1 écu, & ceux-ci un demi-écu; ainsi on aura

$$x + \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}x = 901.$$

On trouvera de la même maniere que si les Suabes donnent l'assaut, on a

$$y + \tfrac{1}{3}s - \tfrac{1}{3}y = 901.$$

Et enfin que, si ce sont les Saxons qui montent à l'assaut, on aura

$$z + \tfrac{1}{4}s - \tfrac{1}{4}z = 901.$$

Chacune de ces trois équations suffira pour déterminer une des inconnues x, y & z;

car

car la premiere donne $x=1802-ſ$,
la ſeconde donne $2y=2703-ſ$,
la troiſieme donne $3z=3604-ſ$.

Or ſi l'on prend maintenant les valeurs de $6x$, $6y$ & $6z$, & qu'on écrive ces valeurs l'une ſous l'autre, on aura

$$6x=10812-6ſ,$$
$$6y=8109-3ſ,$$
$$\underline{6z=7208-2ſ,}$$

& ajoutant : $6ſ=26129-11ſ$, ou $17ſ=26129$; ainſi $ſ=1532$; c'eſt le nombre total des Soldats, au moyen duquel on trouve

$$x=1802-1537=265;$$
$$2y=2703-1537=1166, \text{ ou } y=583;$$
$$3x=3604-1537=2067, \text{ ou } z=689.$$

Réponſe. La compagnie des Suiſſes eſt de 265 hommes; celle des Suabes, de 583 hommes; & celle des Saxons, de 689 hommes.

CHAPITRE V.

De la résolution des Equations pures du second degré.

623.

On dit qu'une équation est du second degré, quand elle renferme le quarré ou la seconde puissance de l'inconnue, sans qu'on y trouve des puissances plus élevées de cette inconnue. Une équation qui renfermeroit aussi la troisieme puissance de l'inconnue, appartiendroit déjà aux équations cubiques, & sa résolution demanderoit des regles particulieres.

624.

Il n'y a donc que trois especes de termes dans une équation du second degré. En premier lieu les termes où l'inconnue ne se trouve pas du tout, ou qui ne sont composés que de nombres connus.

En second lieu, les termes dans lesquels on rencontre seulement la premiere puissance de la quantité inconnue.

En troisieme lieu, les termes qui contiennent le quarré de la quantité inconnue.

Ainsi x signifiant une quantité inconnue, & les lettres a, b, c, d, &c. représentant des nombres connus, les termes de la premiere espece seront de la forme a, les termes de la seconde espece auront la forme bx, & les termes de la troisieme espece auront la forme cxx.

625.

On a déjà vu suffisamment que deux ou plusieurs termes d'une même espece peuvent se réunir ensemble, & être considérés comme un seul terme.

Par exemple, on peut considérer comme un seul terme la formule $axx - bxx + cxx$, en la représentant par $(a - b + c)\,xx$; puisqu'en effet $a - b + c$ est une quantité connue.

Et quand même de tels termes se trouveroient des deux côtés du signe $=$, on a vu comment on doit les porter d'un même côté, & les réduire ensuite à un seul terme. Soit, par exemple, l'équation

$$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11;$$

on soustrait d'abord $2xx$, & il vient

$$-3x + 4 = 3xx - 8x + 11;$$

ajoutant ensuite $8x$, on obtient

$$5x + 4 = 3xx + 11;$$

soustrayant enfin 11, il reste $3xx = 5x - 7$.

626.

On peut aussi transporter tous les termes d'un même côté du signe $=$, de façon qu'il ne reste que 0 dans l'autre membre; le principal est de faire attention que quand on transporte des termes d'un côté à l'autre, il faut en changer les signes.

C'est ainsi que l'équation ci-dessus prendra cette forme, $3xx - 5x + 7 = 0$, & c'est aussi pourquoi on peut représenter toute équation du second degré généralement par cette formule,

$$axx \pm bx \pm e = 0,$$

dans laquelle le ſigne $\pm$ ſe prononce *plus ou moins*, & indique que de tels termes peuvent être tantôt poſitifs & tantôt négatifs.

627.

Quelle forme qu'ait primitivement une équation du ſecond degré, on peut toujours la réduire à cette formule de trois termes: qu'on ſoit parvenu, par exemple, à l'équation

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h},$$

il faudra, avant toute choſe, chaſſer les fractions: multipliant pour cet effet d'abord par $cx+d$, on a $ax+b = \frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, enſuite par $gx+h$, on a

$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+edx+fd$, ce qui eſt une équation du ſecond degré, & qu'on réduit aux trois termes ſuivans, que nous tranſpoſerons en les rangeant de la manière qui eſt le plus en uſage :

$$\begin{aligned}0 = agxx + bgx + bh,\\ -cexx + ahx - fd,\\ -cfx,\\ -edx.\end{aligned}$$

On peut repréſenter auſſi cette équation de la maniere ſuivante, qui eſt même plus claire :

$$0 = (ag - ce)xx + (bg + ah - cf - ed)x + bh - fd.$$

628.

Ces équations du ſecond degré, où toutes les trois eſpeces de termes ſe trouvent, ſe nomment *completes*, & leur réſolution eſt auſſi ſujette à plus de difficultés; c'eſt pourquoi nous commencerons par conſidérer celles où un de ces termes manque.

Or ſi c'étoit le terme xx qui ne ſe trouvât pas dans l'équation, elle ne feroit pas du ſecond degré, mais elle appartiendroit à celles dont nous avons traité ; que ſi c'étoit le terme qui ne contient que des nombres connus, qui manquât, l'équation auroit cette forme, $axx \pm bx = 0$, laquelle

étant divisible par x, se réduit à $ax \pm b = 0$, qui est pareillement une équation du premier degré, & n'appartient pas ici.

629.

Mais lorsque c'est le terme moyen, lequel contient la premiere puissance de x, qui manque, l'équation revêt cette forme, $axx \pm c = 0$, ou $axx = \mp c$; le signe de c pouvant être soit positif, soit négatif.

Nous appellerons une telle équation, une équation du second degré *pure*, par la raison que sa résolution ne souffre aucune difficulté. En effet, on n'a qu'à diviser par a, on obtient $xx = \frac{c}{a}$; & prenant de part & d'autre la racine quarrée, on trouve $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; au moyen de quoi l'équation est résolue.

630.

Mais nous avons à présent trois cas à considérer ici. Le premier, quand $\frac{c}{a}$ est un nombre quarré, dont on puisse par consé-

quent assigner réellement la racine, on obtient dans ce cas pour la valeur de x un nombre rationnel, lequel peut être ou entier ou rompu. Par exemple, l'équation $xx=144$, donne $x=12$; & celle-ci, $xx=\frac{9}{16}$, donne $x=\frac{3}{4}$.

Le second cas a lieu, quand $\frac{c}{a}$ n'est pas un quarré, dans lequel cas par conséquent il faut se contenter du signe $\sqrt{}$. Si, par exemple, $xx=12$, on a $x=\sqrt{12}$, dont la valeur peut se déterminer par approximation, comme nous l'avons fait voir plus haut.

Le troisieme cas enfin est celui où $\frac{a}{c}$ devient un nombre négatif; alors la valeur de x est tout-à-fait impossible & imaginaire, & ce résultat prouve que la question qui a conduit à une telle équation, est impossible d'elle-même.

631.

Nous observerons encore, avant que d'aller plus loin, que toutes les fois qu'il

eſt queſtion d'extraire la racine quarrée d'un nombre, cette racine a toujours deux valeurs, dont l'une eſt poſitive & l'autre négative. Nous avons déjà fait remarquer cela plus haut. Qu'on ait l'équation $xx=49$, la valeur de x ne ſera pas ſeulement $+7$, mais auſſi -7, ce qu'on indique par $x=\pm 7$. Ainſi toutes ces queſtions admettent une ſolution double; mais on remarquera cependant que dans pluſieurs cas, dans ceux, par exemple, où il s'agit d'un certain nombre d'hommes, l'on comprend bien que la valeur négative ne ſauroit avoir lieu.

632.

Dans le cas précédent même, où c'eſt la quantité connue qui manque, les équations, $axx=bx$, ne laiſſent pas d'admettre deux valeurs de x, quoiqu'on n'en trouve qu'une ſeule, ſi l'on diviſe par x. Car ſi l'on a, par exemple, l'équation $xx=3x$, où il s'agit d'aſſigner pour x une valeur telle, que xx devienne égal à $3x$, cela ſe fait

en ſuppoſant $x = 3$, valeur qu'on trouve en diviſant l'équation par x; mais outre cette valeur il en eſt encore une autre qui ſatisfait également, c'eſt $x = 0$; car alors $xx = 0$, & $3x = 0$. Toutes les équations du ſecond degré en général admettent deux réſolutions, tandis qu'une ſeule ſolution peut avoir lieu pour les équations du premier degré.

Nous allons maintenant éclaircir par quelques exemples ce que nous avons dit ſur les équations du ſecond degré pures.

633.

Premiere queſtion. On cherche un nombre dont la moitié, multipliée par le tiers, faſſe 24?

Soit ce nombre $= x$: il faut que $\frac{1}{2}x$, multiplié par $\frac{1}{3}x$, donne 24; on aura donc l'équation $\frac{1}{6}xx = 24$.

Multipliant par 6, on a $xx = 144$; & l'extraction de la racine donne $x = \pm 12$.

on met $\pm$; car si $x = +12$, on a $\frac{1}{2}x = 6$, & $\frac{1}{3}x = 4$, & le produit de ces deux nombres est 24; & si $x = -12$, on a $\frac{1}{2}x = -6$, & $\frac{1}{3}x = -4$, dont le produit est également 24.

634.

Seconde question. On cherche un nombre tel, qu'en y ajoutant 5, & en en retranchant 5, le produit de la somme par la différence soit $= 96$.

Soit ce nombre x, il faudra que $x + 5$, multiplié par $x - 5$, donne 96; d'où résulte l'équation $xx - 25 = 96$.

Ajoutant 25, on a $xx = 121$; & extrayant la racine, il vient $x = 11$. Ainsi $x + 5 = 16$, & $x - 5 = 6$; or en effet $6.16 = 96$.

635.

Troisieme question. On cherche un nombre tel, qu'en l'ajoutant à 10, & en le retranchant de 10, la somme multipliée par le reste, ou par la différence, donne 51.

Que x soit ce nombre; il faut que $10+x$, multiplié par $10-x$, fasse 51, & qu'ainsi $100-xx=51$. Ajoutant xx, & soustrayant 51, on a $xx=49$, dont la racine quarrée donne $x=7$.

636.

Quatrieme question. Trois Joueurs qui ont fait une partie, se retirent; le premier avec autant de fois 7 écus, que le second a de fois trois écus; & le second avec autant de fois 17 écus, que le troisieme a de fois 5 écus; & si on multiplie l'argent du premier par l'argent du second, & l'argent du second par l'argent du troisieme, & enfin l'argent du troisieme par l'argent du premier, la somme de ces trois produits est $3830\frac{2}{3}$. Combien d'argent ont-ils chacun?

Supposons que le premier Joueur ait x écus; & puisqu'il a autant de fois 7 écus, que le second a de fois 3 écus, cela signifie que son argent est à celui du second, en raison de $7:3$.

On fera donc $7:3 = x$, à l'argent du second Joueur, qui est donc $\frac{3}{7}x$.

De plus, comme l'argent du second Joueur est à celui du troisieme en raison de $17:5$, on dira $17:5 = \frac{3}{7}x$ à l'argent du troisieme Joueur, ou à $\frac{15}{119}x$.

Multipliant à présent x, ou l'argent du premier Joueur, par $\frac{3}{7}x$, l'argent du second, on a le produit $\frac{3}{7}xx$.

Après cela, $\frac{3}{7}x$, l'argent du second, multiplié par l'argent du troisieme, ou par $\frac{15}{119}x$, donne $\frac{45}{833}xx$. Enfin l'argent du troisieme, ou $\frac{15}{119}x$, multiplié par x, ou l'argent du premier, donne $\frac{15}{119}xx$. La somme de ces trois produits est $\frac{3}{7}xx + \frac{45}{833}xx + \frac{15}{119}xx$; & en réduisant au même dénominateur, on la trouve $= \frac{507}{833}xx$; ce qui doit équivaloir au nombre $3830\frac{2}{3}$.

On a donc $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{2}{3}$.

Ainsi $\frac{1521}{833}xx = 11492$, & $1521xx$ étant égal à 9572836, divisant par 1521, on

a $xx = \frac{9572836}{1521}$; & en prenant la racine, on trouve $x = \frac{3094}{39}$. Cette fraction est encore réductible à de moindres termes, en divisant par 13; ainsi $x = \frac{238}{3} = 79\frac{1}{3}$; & on conclut de là que $\frac{3}{7}x = 34$, & que $\frac{15}{119}x = 10$.

Réponse. Le premier Joueur a $79\frac{1}{3}$ écus, le second a 34 écus, & le troisieme se retire avec 10 écus.

Remarque. Ce calcul peut se faire encore d'une maniere plus facile; savoir, en prenant les facteurs des nombres qui s'y présentent, & en faisant attention principalement aux quarrés de ces facteurs.

On voit que $507 = 3 . 169$, & que 169 est le quarré de 13; ensuite, que $833 = 7 . 119$, & que $119 = 7 . 17$. Or on a $\frac{3.169}{17.49}xx = 3830\frac{2}{3}$, & si on multiplie par 3, on a $\frac{9.169}{17.49}xx = 11492$. Qu'on résolve aussi ce nombre en ses facteurs; on voit d'abord que le premier est 4, c'est-à-dire, que $11492 = 4 . 2873$; de plus 2873 est divisible par

17, de forte que $2873 = 17 \cdot 169$. Par conféquent notre équation aura la forme fuivante : $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49} = 4 \cdot 17 \cdot 169$, laquelle, divifée par 169, fe réduit à $\frac{9}{17 \cdot 49} xx = 4 \cdot 17$; multipliant de plus par $17 \cdot 49$, & divifant par 9, on a $xx = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{9}$, où tous les facteurs font des quarrés; d'où il fuit qu'on a, fans autre calcul, la racine $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$, comme ci-devant.

637.

Cinquieme queſtion. Quelques Négocians établiffent un Facteur à Archangel. Chacun d'eux contribue pour le commerce qu'ils ont en vue, dix fois autant d'écus qu'ils font d'Affociés. Le profit du Facteur eft fixé à deux fois autant d'écus qu'il y a d'Affociés pour 100 écus. Et fi l'on multiplie la $\frac{1}{100}$ partie de fon gain total par $2\frac{2}{9}$, on trouve le nombre des Affociés. On demande quel eft ce nombre?

Soit ce nombre $= x$; & puifque chaque

Associé a fourni $10x$, le capital entier est $=10xx$. Or avec chaque centaine d'écus le Facteur gagne $2x$, son profit sera donc $\frac{1}{5}x^3$ avec le capital $10xx$. La $\frac{1}{100}$ partie de ce gain est $\frac{1}{500}x^3$; multipliant par $2\frac{2}{9}$, ou par $\frac{20}{9}$, on a $\frac{20}{4500}x^3$, ou $\frac{1}{225}x^3$, & c'est ce qui doit être égal au nombre des Associés x.

On a donc l'équation $\frac{1}{225}x^3=x$, ou $x^3=225x$; elle paroît d'abord être du troisieme degré; mais comme on peut diviser par x, elle se réduit à l'équation du second degré $xx=225$; d'où l'on tire $x=15$.

Réponse. Il y a quinze Associés, & chacun a contribué 150 écus.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

De la résolution des Equations mixtes du second degré.

638.

On dit d'une équation du second degré, qu'elle est *mixte* ou complete, lorsqu'on y rencontre trois especes de termes, savoir, celle qui contient le quarré de la quantité inconnue, comme axx; celle où l'inconnue se trouve seulement élevée à la premiere puissance, comme bx; enfin l'espece de termes qui n'est composée que de quantités connues. Et puisqu'on peut réunir deux ou plusieurs termes d'une même espece en un seul, & qu'on peut porter tous les termes d'un même côté du signe $=$, la forme de l'équation mixte du second degré sera celle-ci :

$$axx \mp bx \mp c = 0.$$

Nous montrerons dans ce Chapitre

comment on doit tirer la valeur de x de ces fortes d'équations ; on verra qu'il y a deux routes pour y parvenir.

639.

Une équation de l'efpece dont il s'agit, peut fe réduire, par le moyen de la divifion, à une forme telle, que le premier terme ne contienne purement que le quarré xx de l'inconnue x. On laiffera le fecond terme du même côté où eft x, & le terme connu on le portera de l'autre côté du figne $=$. Notre équation prendra de cette maniere la forme $xx \pm px = \pm q$, où p & q fignifient des nombres connus quelconques, pofitifs ou négatifs; & tout fe réduit à préfent à déterminer la vraie valeur de x. Nous commencerons par remarquer que fi $xx + px$ étoit un quarré effectif, la réfolution n'auroit aucune difficulté, parce qu'il ne s'agiroit que de prendre des deux côtés la racine quarrée.

640.

Mais il est clair que $xx+px$ ne sauroit être un quarré, puisque nous avons vu plus haut que si une racine est de deux termes, par exemple $x+n$, son quarré contient toujours trois termes, savoir, outre le quarré de chaque partie, encore le double du produit des deux parties; c'est-à-dire, que le quarré de $x+n$ est $xx+2nx+nn$. Or nous avons déjà d'un côté $xx+px$, nous pouvons donc regarder xx comme le quarré de la premiere partie de la racine; & il faut en ce cas que px représente le double du produit de la premiere partie x de la racine par la seconde partie; par conséquent cette seconde partie doit être $\frac{1}{2}p$, & en effet le quarré de $x+\frac{1}{2}p$ se trouve être $xx+px+\frac{1}{4}pp$.

641.

Or $xx+px+\frac{1}{4}pp$ étant un quarré réel qui a pour racine $x+\frac{1}{2}p$, si nous repre-

nons notre équation $xx+px=q$, nous n'avons qu'à ajouter de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$, ce qui nous donne $xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp$, où le premier membre est effectivement un quarré, & où l'autre membre ne renferme que des quantités connues. Si donc nous prenons des deux côtés la racine quarrée, nous trouvons $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$; & soustrayant $\frac{1}{2}p$, nous obtenons $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; & comme toute racine quarrée peut être prise soit affirmativement, soit négativement, nous aurons pour x deux valeurs exprimées de cette maniere:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}.$$

642.

Voilà la formule qui contient la regle, d'après laquelle toutes les équations du second degré peuvent être résolues, & il sera bon d'en imprimer la substance dans la mémoire, afin qu'on n'ait pas besoin de répéter à chaque fois toute l'opération que

nous venons de faire. On pourra toujours ordonner l'équation, de façon que le quarré pur xx se trouve d'un seul côté, & qu'ainsi l'équation ci-dessus ait la forme $xx = -px + q$, où l'on voit alors sur le champ que $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

643.

La regle générale que nous déduisons de là pour résoudre l'équation $xx = -px + q$, consiste donc en ceci :

Que la quantité inconnue x est égale à la moitié du nombre qui multiplie x dans l'autre membre de l'équation, *plus* ou *moins* la racine quarrée du quarré du nombre que l'on vient de dire, & de la quantité connue qui forme le troisieme terme de l'équation.

C'est ainsi que si on avoit l'équation $xx = 6x + 7$, on diroit aussi-tôt que $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$, d'où résultent ces deux valeurs de x, I.) $x = 7$; II.) $x = -1$. Pareillement l'équation $xx = 10x - 9$, don-

neroit $x = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$, c'eſt-à-dire que les deux valeurs de x ſont 9 & 1.

644.

On ſe mettra encore mieux au fait de cette regle en diſtinguant les cas ſuivans : I.) ſi p eſt un nombre pair ; II.) ſi p eſt un nombre impair ; & III.) ſi p eſt un nombre rompu.

Soit I.) p un nombre pair, & l'équation telle que, $xx = 2px + q$, on aura $x = p \pm \sqrt{pp + q}$.

Soit II.) p un nombre impair, & l'équation $xx = px + q$, on aura $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$; & puiſque $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp + 4q}{4}$, on pourra extraire la racine quarrée de ce dénominateur, & écrire $x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{pp+4q}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{pp+4q}}{2}$.

Enfin III.) Soit p une fraction, on pourra réſoudre l'équation de la maniere qui ſuit : Que l'équation en queſtion ſoit celle-ci, $axx = bx + c$, ou $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, on aura, par la regle, $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}}$. Or $\frac{bb}{4aa}$

$+\frac{c}{a}=\frac{bb+4ac}{4aa}$, où le dénominateur eſt un quarré ; ainſi $x=\frac{b\pm\sqrt{bb+4ac}}{2a}$.

645.

L'autre voie qui conduit à la réſolution des équations du ſecond degré mixtes, eſt de les transformer en des équations pures. Cela ſe fait en ſubſtituant, par exemp. dans l'équation $xx=px+q$, à la place de l'inconnue x, une autre inconnue y, telle que $x=y+\frac{1}{2}p$; au moyen de quoi, quand on a déterminé y, on trouve auſſi-tôt la valeur de x.

Si nous faiſons cette ſubſtitution de $y+\frac{1}{2}p$ à la place de x, nous avons $xx=yy+py+\frac{1}{4}pp$, & $px=py+\frac{1}{2}pp$; par conſéquent notre équation ſe change en celle-ci : $yy+py+\frac{1}{4}pp=py+\frac{1}{2}pp+q$, qui ſe réduit, en ſouſtrayant py, d'abord à $yy+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{2}pp+q$; & enſuite, en ſouſtrayant $\frac{1}{4}pp$, à $yy=\frac{1}{4}pp+q$. Ceci eſt une équation du ſecond degré pure, qui donne auſſi-

tôt $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$. Or puisque $x = y + \frac{1}{2}p$, on a $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus. Il ne nous reste donc qu'à éclaircir cette regle par quelques exemples.

646.

Premiere question. J'ai deux nombres ; l'un surpasse l'autre de 6, & leur produit est 91. Quels sont ces nombres ?

Si le plus petit est x, l'autre est $x + 6$, & leur produit $91 = xx + 6x$.

Soustrayant $6x$, il reste $xx = 91 - 6x$, & la regle donne $x = -3 \pm \sqrt{9 + 91} = -3 \pm 10$; ainsi $x = 7$, & $x = -13$.

Rép. La question admet deux solutions :

Suivant l'une, le plus petit nombre x est $= 7$, & le plus grand $x + 6 = 13$.

Suivant l'autre, le plus petit nombre $x = -13$, & le plus grand $x + 6 = -7$.

647.

Seconde question. Trouver un nombre tel que, si de son quarré je retranche 9,

il me vienne un nombre qui ſoit d'autant d'unités plus grand que 100, que le nombre cherché eſt plus petit que 23.

Soit le nombre cherché $= x$; je vois que $xx - 9$ ſurpaſſe 100 de $xx - 109$. Et puiſque x eſt au-deſſous de 23 de $23 - x$, j'aurai cette équation : $xx - 109 = 23 - x$.

Donc $xx = -x + 132$, & ,par la regle, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 132}, = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2}$. Ainſi $x = 11$ & $x = -12$.

Réponſe. Lorſqu'on ne demande qu'un nombre poſitif, ce nombre cherché eſt 11, dont le quarré moins 9 eſt 112, & par conſéquent de 12 plus grand que 100, de même que 11 eſt de 12 plus petit que 23.

648.

Troiſieme queſtion. Trouver un nombre tel, que ſi on multiplie ſa moitié par ſon tiers, & qu'au produit on ajoute la moitié du nombre qu'on cherche, le réſultat ſoit 30.

Qu'on suppose ce nombre $= x$, sa moitié, multipliée par son tiers, fera $\frac{1}{6}xx$; il faut donc que $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x = 30$. Multipliant par 6, on a $xx + 3x = 180$, ou $xx = -3x + 180$, ce qui donne $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 180} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$.

Par conséquent x est ou $= 12$, ou égal -15.

649.

Quatrieme question. Trouver deux nombres qui soient en proportion double, & tels que si on ajoute leur somme à leur produit, on obtienne 90.

Soit l'un des nombres $= x$, & le plus grand $= 2x$, leur produit sera $= 2xx$, & si on y ajoute $3x$ ou leur somme, la nouvelle somme doit faire 90. Ainsi $2xx + 3x = 90$; $2xx = 90 - 3x$; $xx = -\frac{3}{2}x + 45$, d'où l'on tire $x = -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 45} = -\frac{3}{4} + \frac{27}{4}$.

Par conséquent $x = 6$, ou $x = -7\frac{1}{2}$.

650.

Cinquieme question. Un Maquignon qui a acheté un cheval pour un certain nombre d'écus, le revend pour 119 écus, & il gagne autant pour cent écus, que le cheval lui a coûté. On demande ce qu'il en avoit payé?

Supposons que le cheval ait coûté x écus; comme le Maquignon y gagne x pour cent, on dira 100 donnent le profit x: que donne x? *Réponse*, $\frac{xx}{100}$. Puis donc qu'il a gagné $\frac{xx}{100}$ & que le cheval lui coûte x écus d'achat, il faut qu'il l'ait vendu pour $x + \frac{xx}{100}$; donc $x + \frac{xx}{100} = 119$. Soustrayant x, on a $\frac{xx}{100} = -x + 119$; & multipliant par 100, il vient $xx = -100x + 11900$. Appliquant maintenant la regle, on trouve $x = -50 \pm \sqrt{2500 + 11900} = -50 \pm \sqrt{14400} = -50 \pm 120$.

Réponse. Le cheval a coûté 70 écus, & puisque le Maquignon a gagné 70 pour

cent en le revendant, le profit doit avoir été de 49 écus. Le cheval doit, par conséquent, avoir été revendu en effet pour 70 + 49, c'est-à-dire pour 119 écus.

651.

Sixieme question. Quelqu'un achete un certain nombre de pieces de drap; il paye pour la premiere 2 écus; pour la seconde, 4 écus; pour la troisieme, 6 écus, & de même toujours 2 écus de plus pour les suivantes; & toutes les pieces ensemble lui coûtent 110 écus. Combien y avoit-il de pieces?

Soit le nombre cherché $=x$; & voici le plan de ce que l'Acheteur a payé pour les différentes pieces:

pour la 1, 2, 3, 4, 5 x
il paye 2, 4, 6, 8, 10 $2x$ écus.

Il s'agit par conséquent de sommer la progression arithmétique $2+4+6+8+10+\ldots\ldots 2x$, qui est de x termes, afin d'en déduire le prix de toutes les pieces de drap

prises ensemble. La regle que nous avons donnée plus haut pour cette opération, exige qu'on ajoute le dernier terme & le premier. La somme est $2x + 2$; qu'on multiplie cette somme par le nombre des termes x, le produit est $2xx + 2x$; qu'on divise enfin par la différence 2, le quotient est $xx + x$, c'est la somme de la progression; ainsi l'on a $xx + x = 110$; donc $xx = -x + 110$, & $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 110} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{441}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = 10$.

Réponse. Le nombre des pieces de drap achetées est 10.

652.

Septieme question. Quelqu'un a acheté plusieurs pieces de drap pour 180 écus. S'il avoit reçu pour la même somme 3 pieces de plus, il auroit eu la piece à meilleur marché de 3 écus. Combien a-t-il acheté de pieces?

Faisons le nombre cherché $= x$; chaque piece aura coûté réellement $\frac{180}{x}$ écus. Or si

l'Acheteur avoit eu $x+3$ pieces pour 180 écus, la piece lui feroit revenue à $\frac{180}{x+3}$ écus; & puifque ce prix eft moindre de 3 écus que le prix réel, il faut que nous ayons l'équation,

$$\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3.$$

Multipliant par x, nous avons $\frac{180x}{x+3}=180-3x$; divifant par 3, l'on a $\frac{60x}{x+3}=60-x$; multipliant par $x+3$, nous aurons $60x=180+57x-xx$; ajoutant xx, l'on aura $xx+60x=180+57x$; fouftrayant $60x$, nous aurons $xx=-3x+180$.

La regle donne par conféquent

$$x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+180}, \text{ ou } x=-\frac{3}{2}+\frac{27}{2}$$
$$=12.$$

Réponfe. On a acheté pour 180 écus 12 pieces de drap à 15 écus la piece, & fi on eût obtenu 3 pieces de plus, favoir 15 pieces pour 180 écus, la piece ne feroit revenue qu'à 12 écus, c'eft-à-dire, à 3 écus de moins.

653.

Huitieme question. Deux Marchands entrent en ſociété avec un fonds de 100 écus ; l'un laiſſe ſon argent dans la ſociété pendant trois mois, l'autre laiſſe le ſien pendant deux mois, & chacun retire 99 écus de capital & d'intérêts. On demande quelle part chacun avoit fourni au fonds ?

Suppoſons que le premier Aſſocié ait contribué x écus, l'autre aura contribué $100-x$. Or celui-là retirant 99 écus, ſon profit eſt $99-x$, qu'il aura acquis en trois mois avec le capital x ; & puiſque le ſecond retire pareillement 99 écus, ſon profit eſt $x-1$, qu'il aura acquis en deux mois de temps avec le capital $100-x$; & il eſt clair que le profit de ce ſecond Aſſocié eût été $\frac{3x-3}{2}$, s'il avoit reſté trois mois dans la ſociété. Maintenant, comme les profits acquis dans le même temps ſont proportionnels aux capitaux, nous avons évidemment $x:99-x=100-x:\frac{3x-3}{2}$.

L'égalité du produit des extrêmes & de celui des moyens donne l'équation

$$\frac{3xx-3x}{2}=9900-199x+xx;$$

multipliant par 2, nous aurons $3xx-3x = 19800-398x+2xx$; soustrayant $2xx$, l'on aura $xx-3x=19800-398x$; ajoutant $3x$, nous aurons $xx=19800-395x$.

Donc par la regle

$$x=-\frac{395}{2}+\sqrt{\frac{156025}{4}+\frac{79200}{4}}=-\frac{395}{2}+\frac{485}{2}$$
$$=\frac{90}{2}=45.$$

Réponse. Le premier Associé a contribué 45 écus, & l'autre 55 écus. Le premier ayant gagné en trois mois 54 écus, auroit gagné en un mois 18 écus; & le second ayant gagné en deux mois 44 écus, auroit gagné en un mois 22 écus: or ces deux profits s'accordent; car, si avec 45 écus on gagne 18 écus dans un mois de temps, on gagnera dans le même temps 22 écus avec 55 écus.

654.

Neuvieme question. Deux Payſannes portent enſemble 100 œufs au marché ; l'une en porte plus que l'autre, & cependant le produit eſt le même pour l'une & pour l'autre. La premiere dit à la ſeconde : Si j'avois eu tes œufs, j'aurois retiré 15 ſous. L'autre lui répond : Si j'avois eu les tiens, j'aurois retiré $6\frac{2}{3}$ ſous. Combien d'œufs chacune a-t-elle portés au marché ?

Que la premiere ait eu x œufs, la ſeconde en aura eu $100-x$.

Puis donc que celle-là eût vendu $100-x$ œufs pour 15 ſous, on fera la regle de trois ſuivante :

$$100-x : 15 = x \ldots \text{ à } \frac{15x}{100-x} \text{ ſous.}$$

De même, puiſque la ſeconde eût vendu x œufs pour $6\frac{2}{3}$ ſous, on trouvera combien $100-x$ œufs lui euſſent rendu, en diſant :

$$x : \frac{20}{3} = 100-x \ldots \text{ à } \frac{2000-20x}{3x}.$$

Or les deux Paysannes ont retiré autant d'argent l'une que l'autre ; nous avons par conséquent l'équation, $\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}$, qui se réduit à celle-ci,

$$25\,xx = 200000 - 4000x\,;$$

& enfin à celle-ci,

$$xx = -160x + 8000\,;$$

d'où l'on tire

$$x = -80 + \sqrt{6400 + 8000} = -80 + 120$$
$$= 40.$$

Réponse. La premiere Paysanne avoit 40 œufs, la seconde en avoit 60, & chacune a retiré 10 sous.

655.

Dixieme question. Deux marchands vendent chacun d'une certaine étoffe ; le second en vend 3 aunes de plus que le premier, & ils tirent ensemble 35 écus. Le premier dit au second : J'aurois retiré de votre étoffe 24 écus ; l'autre répond, & moi j'aurois retiré de la vôtre 12 écus & demi. Combien d'aunes avoient-ils chacun?

Suppoſons que le premier ait eu x aunes, le ſecond aura eu $x+3$ aunes. Or puiſque le premier eût vendu $x+3$ aunes pour 24 écus, il faut qu'il ait retiré $\frac{24x}{x+3}$ écus de ſes x aunes. Et quant au ſecond, puiſqu'il eût débité x aunes pour $12\frac{1}{2}$ écus, il faut qu'il ait vendu ſes $x+3$ aunes pour $\frac{25x+75}{2x}$; ainſi la ſomme totale qu'ils ont retirée eſt $\frac{24x}{x+3}+\frac{25x+75}{2x}=35$ écus.

Cette équation ſe réduit à $xx=20x-75$, d'où l'on tire $x=10\pm\sqrt{100-75}=10\pm5$.

Réponſe. La queſtion a deux ſolutions: ſuivant la premiere, le premier Marchand avoit 15 aunes, & le ſecond en avoit 18; & puiſque celui-là eût vendu 18 aunes pour 24 écus, il aura vendu ſes 15 aunes pour 20 écus; le ſecond, qui eût vendu 15 aunes pour 12 écus & demi, aura vendu ſes 18 aunes 15 écus; donc en effet ils ont tiré 35 écus de leur marchandiſe.

Suivant la ſeconde ſolution, le premier

Marchand avoit 5 aunes, & l'autre 8 aunes; ainsi, puisque le premier eût débité 8 aunes pour 24 écus, il aura retiré 15 écus de ses 5 aunes; & le second, puisqu'il eût vendu 5 aunes pour 12 écus & demi, ses 18 aunes lui auront rendu 20 écus. La somme est encore 35 écus.

CHAPITRE VII.

De l'extraction des racines des nombres polygones.

656.

Nous avons fait voir plus haut comment on doit déterminer les nombres polygones; or ce que nous avons nommé alors *un côté*, s'appelle aussi *une racine*. Si donc on indique la racine par x, on trouvera ce qui suit pour tous les nombres polygones:

le III gone, ou le triangle, est $\frac{xx+x}{2}$,

le IV gone, ou le quarré, xx,

le V gone — — — — — — $\frac{3xx-x}{2}$,

le VI gone — — — — — — $2xx-x$;

le VII gone — — — — — — $\frac{5xx-x}{2}$,

le VIII gone — — — — — — $3xx-2x$,

le IX gone — — — — — — $\frac{7xx-5x}{2}$,

le X gone — — — — — — $4xx-3x$,

le n gone — — — — — — $\frac{(n-2)xx- n-4)x}{2}$.

657.

Nous avons fait voir suffisamment plus haut, qu'il est facile, par le moyen de ces formules, de trouver, pour une racine donnée quelconque, un nombre polygone cherché. Mais lorsqu'il s'agit de trouver réciproquement le côté, ou la racine d'un polygone dont on connoît le nombre des côtés, l'opération est plus difficile & demande toujours la résolution d'une

équation du ſecond degré. Cela fait que cet article mérite d'être traité ici ſéparément. Nous le ferons par ordre, en commençant par les nombres triangulaires, & en paſſant de là à ceux d'un plus grand nombre d'angles.

658.

Soit donc 91 le nombre triangulaire donné, & duquel on cherche le côté ou la racine.

Si nous faiſons cette racine $= x$, il faut que $\frac{xx+x}{2}$ ſoit $=91$; que $xx+x=182$, & $xx=-x+182$, & par conſéquent que $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+182}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{729}{4}}$ $=-\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=13$. Nous en concluons que la racine trigonale cherchée eſt 13; car le triangle de 13 eſt 91.

659.

Mais ſoit en général a le nombre trigonal donné, & qu'on en cherche la racine.

Si on la fait $=x$, on a $\frac{xx+x}{2}=a$, ou $xx+x=2a$; donc $xx=-x+2a$, & par la regle, $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2a}$, ou $x=-\frac{1+\sqrt{8a+1}}{2}$.

Ce réſultat donne la regle qui ſuit : Pour trouver une racine trigonale, il faut multiplier par 8 le nombre trigonal donné, ajouter 1 au produit, extraire la racine de la ſomme, ſouſtraire 1 de cette racine, & diviſer enfin le reſte par 2.

660.

On voit par-là que tous les nombres trigonaux ont la propriété, que ſi on les multiplie par 8, & qu'on ajoute l'unité au produit, la ſomme eſt toujours un quarré : la petite table qui ſuit en donne quelques exemples.

Triangles : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 &c.
8 fois + 1 : 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441 &c.

On remarquera que ſi le nombre donné a ne ſatisfait pas à cette condition, c'eſt

ſigne que ce n'eſt pas un nombre trigonal réel, ou qu'on ne peut en indiquer une racine rationnelle.

661.

Qu'on cherche, ſuivant cette regle, la racine trigonale de 210, on aura $a=210$ & $8a+1=1681$, dont la racine quarrée eſt 41; d'où l'on voit que le nombre 210 eſt réellement triangulaire, & que ſa racine eſt $=\frac{41-1}{2}=20$. Mais ſi on donnoit pour trigonal le nombre 4, & qu'on propoſât d'en aſſigner la racine, elle ſe trouveroit $=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{1}{2}$, & par conſéquent irrationnelle; cependant on trouve réellement le triangle de cette racine $\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{1}{2}$, de la maniere qui ſuit:

Puiſque $x=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, on a $xx=\frac{17-\sqrt{33}}{2}$, & en y ajoutant x, la ſomme eſt $xx+x=\frac{16}{2}=8$, & par conſéquent le triangle, ou le nombre trigonal $\frac{xx+x}{2}=4$.

662.

Les nombres tétragones étant la même chofe que les quarrés, ils ne caufent aucune difficulté. Car fuppofons le nombre tétragone donné $=a$, & fa racine cherchée $=x$, nous aurons $xx=a$, & par conféquent $x=\sqrt{a}$; de forte que la racine quarrée & la racine tétragone font la même chofe.

663.

Paffons donc aux nombres pentagones.

Soit 22 un nombre de cette efpece, & x fa racine; il faudra que $\frac{3xx-x}{2}=22$, ou $3xx-x=44$, ou $xx=\frac{1}{3}x+\frac{44}{3}$. On tire de là $x=\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{44}{3}}$, ou $x=\frac{1+\sqrt{529}}{6}$ $=\frac{1}{6}+\frac{23}{6}=4$.

Donc 4 eft la racine pentagone du nombre 22.

664.

Qu'on propofe maintenant la queftion: étant donné le pentagone a, trouver fa racine.

Soit cette racine $=x$, on aura l'équation $\frac{3xx-x}{2}=a$, ou $3xx-x=2a$, ou $xx=\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}$; au moyen de quoi on trouve $x=\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{2a}{3}}$, c'est-à-d. $x=\frac{1+\sqrt{24a+1}}{6}$. Lors donc que a est un pentagone effectif, il faut que $24a+1$ soit un quarré.

Que 330 soit, par exemple, le pentagone donné, la racine sera $x=\frac{1+\sqrt{7921}}{6}=\frac{1+89}{6}=15$.

665.

Soit à présent a un nombre hexagone donné, & qu'on en cherche la racine.

Si on la suppose $=x$, on aura $2xx-x=a$, ou $xx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$; d'où l'on tire $x=\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a}=\frac{1+\sqrt{8a+1}}{4}$ Ainsi pour que a soit réellement un hexagone, il faut que $8a+1$ devienne un quarré; d'où l'on voit que tous les nombres hexagones sont compris dans les trigonaux; mais il n'en est pas de même des racines.

Soit, par exemple, le nombre hexagone

1225, sa racine sera $x = \frac{1+\sqrt{9801}}{4} = \frac{1+99}{4} = 25$.

666.

Supposons a un nombre heptagone, duquel il soit question de trouver le côté ou la racine.

Soit cette racine $= x$, on aura $\frac{5xx-3x}{2} = a$, ou $xx = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}a$, ce qui donne $x = \frac{3}{10} + \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{2}{5}a} = \frac{3+\sqrt{40a+9}}{10}$. Tous les nombres heptagones ont par conséquent la propriété, que si on les multiplie par 40 & qu'on ajoute 9 au produit, la somme est toujours un quarré.

Soit, par exemple, le heptagone 2059; on trouvera sa racine $= x = \frac{3+\sqrt{82369}}{10} = \frac{3+287}{10} = 29$.

667.

Qu'on entende par a un nombre octogone, duquel on veuille trouver la racine x.

On aura $3xx - 2x = a$, ou $xx = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$,

d'où résulte $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}a} = \frac{1+\sqrt{3a+1}}{3}$. Tous les nombres octogones sont tels, par conséquent, que si on les multiplie par 3 & qu'on ajoute l'unité au produit, la somme est constamment un quarré.

Soit, par exemple, 3816 un octogone; sa racine sera $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

668.

Soit enfin a un nombre n gone donné, dont il s'agisse de déterminer la racine; on aura cette équation :

$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2} = a$, ou $(n-2)xx-(n-4)x = 2a$, par conséquent $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$; on en tire

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}}, \text{ ou}$$

$$x + \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{n-4+\sqrt{8(n-2)a+(n-4)^2}}{2(n-2)}.$$

Cette formule renferme une regle générale pour trouver toutes les racines polygones possibles de nombres donnés.

Par ex. soit donné le nombre XXIV gone 3009 ; puisque a est ici $= 3009$ & $n = 24$, on a $n - 2 = 22$ & $n - 4 = 20$; donc la racine ou $x = \frac{20 + \sqrt{529584 + 400}}{44} = \frac{20 + 728}{44} = 17$.

CHAPITRE VIII.

De l'extraction des Racines quarrées des Binomes.

669.

On nomme en Algebre *un binome* (*), une quantité composée de deux parties qui sont, ou toutes affectées du signe de la racine quarrée, ou dont l'une au moins renferme ce signe.

C'est par cette raison que $3 + \sqrt{5}$ est

(*) Quoique dans l'Algebre on nomme en général *binome* une quantité composée de deux termes, M. *Euler* a jugé à propos d'appeler ainsi en particulier les expressions que les Analystes françois désignent par *quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.*

un binome, & pareillement $\sqrt{8}+\sqrt{3}$; & il eſt indifférent que ces deux termes ſoient joints par le ſigne $+$ ou par le ſigne $-$. C'eſt pourquoi $3-\sqrt{5}$ eſt auſſi bien un binome que $3+\sqrt{5}$.

670.

La principale raiſon pour laquelle ces binomes méritent attention, c'eſt que dans la réſolution des équations du ſecond degré, c'eſt toujours à des quantités de cette forme qu'on parvient, lorſque la réſolution ne peut ſe faire. Par exemple, l'équation $xx = 6x-4$ donne $x=3+\sqrt{5}$.

On ſent bien, par conſéquent, que ces formules doivent ſe préſenter fréquemment dans les calculs algébriques; auſſi avons-nous eu ſoin plus haut de faire voir comment on doit les traiter dans les opérations ordinaires de l'Addition, de la Souſtraction, de la Multiplication & de la Diviſion; mais ce n'eſt qu'à préſent que nous ſommes en état de montrer comment on

doit en extraire les racines quarrées, c'eſt-à-dire, autant que cette extraction eſt poſſible; car, quand elle ne l'eſt pas, on ſe contente de donner un nouveau ſigne radical à la quantité. La racine quarrée de $3+\sqrt{2}$ eſt $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

671.

Il faut obſerver d'abord que les quarrés de tels binomes ſont auſſi des binomes pareils, dans leſquels même un des termes eſt toujours rationnel.

Car, qu'on prenne le quarré de $a+\sqrt{b}$, on trouvera $(aa+b)+2a\sqrt{b}$. Si donc il s'agiſſoit réciproquement de prendre la racine de la formule $(aa+b)+2a\sqrt{b}$, on la trouveroit $=a+\sqrt{b}$, & il eſt, ſans contredit, bien plus facile de s'en faire une idée de cette maniere, que ſi on avoit ſimplement mis encore le ſigne $\sqrt{}$ devant cette formule. De même, ſi on prend le quarré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on trouve $(a+b)+2\sqrt{ab}$; donc réciproquement la racine quarrée de

$(a+b)+2\sqrt{ab}$ sera $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, laquelle sera pareillement plus facile à saisir, que si on se contentoit de mettre le signe $\sqrt{}$, devant la quantité.

672.

Il s'agit donc principalement de déterminer un caractere qui puisse faire reconnoître dans tous les cas si une telle racine quarrée a lieu ou non. Nous commencerons, dans ce dessein, par une formule facile, en cherchant si on peut assigner, dans le sens que nous avons dit, la racine quarrée du binome $5+2\sqrt{6}$.

Supposons donc que cette racine soit $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; le quarré en est $(x+y)+2\sqrt{xy}$, & il doit être égal à la formule $5+2\sqrt{6}$. Par conséquent la partie rationnelle $x+y$ doit être égale à 5, & la partie irrationnelle $2\sqrt{xy}$ doit être égale à $2\sqrt{6}$. Cette derniere égalité donne $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$, & $xy=6$. Or puisque $x+y=5$, on a $y=5-x$, & cette valeur substituée dans l'équation

tion $xy=6$, produira $5x+xx=6$, ou $xx=5x-6$. Donc $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$. Ainſi $x=3$ & $y=2$, d'où nous concluons que la racine quarrée de $5+2\sqrt{6}$ eſt $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

673.

Comme nous avons trouvé ici les deux équations, I.) $x+y=5$, & II.) $xy=6$, nous allons indiquer une voie particuliere pour en tirer les valeurs de x & de y.

Puiſque $x+y=5$, qu'on prenne les quarrés $xx+2xy+yy=25$; faiſant attention maintenant que $xx-2xy+yy$ eſt le quarré de $x-y$, qu'on ſouſtraie de $xx+2xy+yy=25$ l'équation $xy=6$ priſe quatre fois, ou $4xy=24$, afin d'avoir $xx-2xy+yy=1$; car prenant à préſent les racines, on a $x-y=1$; & $x+y$ étant $=5$, on trouvera aiſément $x=3$ & $y=2$. Donc la racine quarrée de $5+2\sqrt{6}$ eſt $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

674.

Considérons le binome général $a+\sqrt{b}$, & supposons sa racine quarrée $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, nous aurons l'équation $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$; ainsi $x+y=a$, & $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, ou $4xy=b$; soustrayant ce quarré du quarré de l'équation $x+y=a$, ou de $xx+2xy+yy=aa$, il reste $xx-2xy+yy=aa-b$, dont la racine quarrée est $x-y=\sqrt{aa-b}$. Or $x+y=a$; nous avons donc $x=\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}$ & $y=\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}$, & par conséquent la racine quarrée cherchée de $a+\sqrt{b}$ est $\sqrt{\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}}$.

675.

Nous conviendrons que cette formule est plus compliquée que si l'on eût mis simplement le signe radical $\sqrt{}$ devant le binome donné $a+\sqrt{b}$, & qu'on eût écrit $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Mais considérons que ladite formule peut se simplifier beaucoup, lorsque

les nombres a & b ſont tels que $aa-b$ devient un quarré, puiſqu'alors le ſigne $\sqrt{}$ qui eſt ſous le ſigne $\sqrt{}$ ſe trouve éliminé. Nous voyons en même temps qu'on ne peut extraire commodément la racine quarrée du binome $a+\sqrt{b}$, que lorſque $aa-b=cc$; car dans ce cas la racine quarrée cherchée eſt $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}$; & que ſi $aa-b$ n'eſt pas un quarré parfait, on ne peut indiquer plus convenablement la racine quarrée de $a+\sqrt{b}$, qu'en mettant le ſigne radical $\sqrt{}$ devant cette quantité.

676.

La condition donc qui eſt requiſe pour qu'on puiſſe exprimer d'une façon plus commode la racine quarrée d'un binome $a+\sqrt{b}$, c'eſt que $aa-b$ ſoit un quarré; & ſi on indique ce quarré par cc, on aura pour la racine quarrée en queſtion $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Il faut remarquer de plus que la racine quarrée de $a-\sqrt{b}$ ſera $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$;

car, en prenant le quarré de cette formule, on trouve $a - 2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; or puiſque $cc = aa - b$, & par conſéquent $aa - cc = b$, le même quarré ſe trouve $= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \frac{2\sqrt{b}}{2} = a - \sqrt{b}$.

677.

Lors donc qu'il s'agit d'extraire la racine quarrée d'un binome tel que $a \pm \sqrt{b}$, la regle eſt de ſouſtraire du quarré aa de la partie rationnelle le quarré b de la partie irrationnelle, de prendre la racine quarrée du reſte, & en nommant cette racine c, d'écrire pour la racine cherchée $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

678.

Qu'on cherche la racine quarrée de $2 + \sqrt{3}$, on a $a = 2$ & $b = 3$; donc $aa - b = cc = 1$, & $c = 1$; ainſi la racine cherchée $= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Qu'il s'agiſſe de trouver la racine quarrée du binome $11 + 6\sqrt{2}$, on aura $a = 11$,

& $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; par conséquent $b = 36.2 = 72$, & $aa - b = 49$; ce qui donne $c = 7$; & il résulte de là que la racine quarrée de $11 + 6\sqrt{2}$ est $\sqrt{9} + \sqrt{2}$, ou $3 + \sqrt{2}$.

Qu'on cherche la racine quarrée de $11 + 2\sqrt{30}$: ici $a = 11$ & $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$; par conséquent $b = 4.30 = 120$, & $aa - b = 1$, & $c = 1$; donc la racine cherchée $= \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

679.

Cette regle a lieu également, lors même que le binome renferme des quantités imaginaires ou impossibles.

Soit proposé, par exemple, le binome $1 + 4\sqrt{-3}$, on aura $a = 1$ & $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$, c'est-à-dire, $b = -48$ & $aa - b = 49$. Donc $c = 7$, & par conséquent la racine quarrée qu'on cherche $= \sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Autre exemple. Soit donné $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, nous avons $a = -\frac{1}{2}$; $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, & $b = \frac{1}{4}. -3 = -\frac{3}{4}$. Donc $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$=1$, & $c=1$; & le résultat cherché eſt $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$, ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Un autre exemple remarquable eſt celui où il s'agit de trouver la racine quarrée de $2\sqrt{-1}$. Comme il n'y a point ici de partie rationnelle, on aura $a=0$; or $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$ & $b=-4$, donc $aa-b=4$ & $c=2$; par conſéquent la racine quarrée qu'on cherche eſt $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, & en effet le quarré de cette quantité eſt $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

680.

Suppoſons encore qu'il ſe *préſentât une* équation telle que $xx=a\pm\sqrt{b}$, & que $aa-b$ fût $=cc$; on en concluroit la valeur de $x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$, ce qui peut être d'uſage en bien des cas.

Soit, par exemple, $xx=17+12\sqrt{2}$, on aura $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$.

681.

Ce cas a eu lieu principalement dans la réſolution de quelques équations du quatrieme

degré, par exemple, de $x^4 = 2axx + d$. Car si l'on suppose $xx = y$, on a $x^4 = yy$, ce qui réduit l'équation donnée à $yy = 2ay + d$, & d'où l'on tire $y = a \pm \sqrt{aa + d}$. On a donc $xx = a \pm \sqrt{aa + d}$, & par conséquent encore une extraction de racine à faire. Or, puisqu'ici $\sqrt{b} = \sqrt{aa + d}$, on aura $b = aa + d$, & $aa - b = -d$. Si donc $-d$ est un quarré comme cc, c'est-à-dire que $d = -cc$, on pourra assigner la racine demandée.

Supposons qu'effectivement $d = -cc$, ou bien que l'équation du quatrieme degré proposée soit $x^4 = 2axx - cc$, nous trouverons donc $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

682.

Nous rendrons plus sensible, par quelques exemples, ce que nous venons de dire.

1°. On cherche deux nombres dont le produit soit 105, & dont les quarrés fassent ensemble 274.

Indiquons ces deux nombres par x & y, nous aurons les deux équations, I.) $xy = 105$, & II.) $xx + yy = 274$.

La premiere donne $y = \frac{105}{x}$, & cette valeur de y étant fubftituée dans la feconde équation, nous avons $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Donc $x^4 + 105^2 = 274xx$, ou $x^4 = 274xx - 105^2$.

Si nous comparons maintenant cette équation avec celle de l'article précédent, nous avons $2a = 274$, & $-cc = -105^2$; par conféquent $c = 105$, & $a = 137$. Nous trouvons par conféquent

$$x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4.$$

Il s'enfuit de-là que x eft, ou $= 15$, ou $= 7$. Dans le premier cas $y = 7$, dans le fecond cas $y = 15$. Donc les deux nombres cherchés font 15 & 7.

683.

Il fera bon cependant de remarquer que ce calcul peut fe faire beaucoup plus facilement d'une autre maniere. Car puifque

$xx+2xy+yy$ & $xx-2xy+yy$ font des quarrés, & que nous connoiffons les valeurs de $xx+yy$ & de xy, nous n'avons qu'à prendre le double de cette derniere quantité, l'ajouter à la premiere & l'en fouftraire, comme on va voir : $xx+yy=274$. Si on y ajoute $2xy=210$, on a $xx+2xy+yy=484$, ce qui donne $x+y=22$.

Souftrayant à préfent $2xy$, il refte $xx-2xy+yy=64$, d'où l'on tire $x-y=8$.

Ainfi $2x=30$ & $2y=14$, & par conféquent $x=15$ & $y=7$.

La queftion générale qui fuit, fe réfout par la même méthode.

2°. On cherche deux nombres, dont le produit foit $=m$, & la fomme des quarrés $=n$.

Si ces nombres font, l'un $=x$, l'autre $=y$, on a les deux équations fuivantes : I.) $xy=m$, II.) $xx+yy=n$. Or $2xy=2m$ étant ajouté à $xx+yy=n$, on a $xx+2xy+yy=n+2m$, & par conféquent $x+y=\sqrt{n+2m}$.

Mais soustrayant $2xy$, il reste $xx - 2xy + yy = n - 2m$, d'où l'on tire $x - y = \sqrt{n - 2m}$; on aura donc $x = \frac{1}{2}\sqrt{n + 2m} + \frac{1}{2}\sqrt{n - 2m}$, & $y = \frac{1}{2}\sqrt{n + 2m} - \frac{1}{2}\sqrt{n - 2m}$.

684.

3°. On cherche deux nombres *tels que* leur produit $= 35$, & la différence de leurs quarrés $= 24$.

Soit le plus grand des deux nombres $= x$ & le plus petit $= y$, on aura les deux équations $xy = 35$, & $xx - yy = 24$; & les mêmes avantages n'ayant pas lieu ici, on procédera par la voie ordinaire. *La premiere* équation donne $y = \frac{35}{x}$, & , en substituant cette valeur de y dans la seconde, on a $xx - \frac{1225}{xx} = 24$. Multipliant par xx, on a $x^4 - 1225 = 24xx$, & $x^4 = 24xx + 1225$. Or, le second membre de cette équation étant affecté du signe $+$, on ne pourra pas faire usage de la formule donnée ci-dessus, parce que cc étant $= - 1225$, c deviendroit imaginaire.

Qu'on fasse donc $xx = z$, on aura $zz = 24z + 1225$, d'où l'on tire $z = 12 \pm \sqrt{144 + 1225}$, ou $z = 12 \pm 37$; par conséquent $xx = 12 \pm 37$, c'est-à-d. ou $= 49$ ou $= -25$.

Si on adopte la premiere valeur, on a $x = 7$ & $y = 5$.

Si on adopte la seconde valeur, on a $x = \sqrt{-25}$ & $y = \frac{35}{\sqrt{-25}} = \sqrt{\frac{1225}{-25}} = \sqrt{-49}$.

685.

Nous terminerons ce Chapitre par la question suivante :

4°. On cherche deux nombres tels qu'il y ait égalité entre leur somme, leur produit & la différence de leurs quarrés.

Soit x le plus grand des deux nombres, & y le plus petit ; il faudra que les trois formules qui suivent soient égales entre elles : I.) la somme $x + y$; II.) le produit xy ; III.) la différence des quarrés $xx - yy$. Si l'on compare la premiere avec la

ſeconde, on a $x+y=xy$, ce qui donnera une valeur de x; car on aura $y=xy-x$ $=x(y-1)$, & $x=\frac{y}{y-1}$. Par conſéquent $x+y=\frac{yy}{y-1}$, & $xy=\frac{yy}{y-1}$, c'eſt-à-dire que la ſomme eſt en effet égale au produit; & c'eſt à quoi doit être égale auſſi la différence des quarrés. Or on a $xx-yy$ $=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$; faiſant donc ceci égal à la quantité trouvée $\frac{yy}{y-1}$, on a $\frac{yy}{y-1}$ $=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$; diviſant par yy, il vient $\frac{1}{y-1}$ $=\frac{-yy+2y}{yy-2y+1}$; multipliant par $(y-1)^2$, on a $y-1=-yy+2y$; par conſéquent $yy=y$ $+1$. Cela donne $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{2}$ $\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$ ou $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & on aura donc x $=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

Pour chaſſer la quantité ſourde du dénominateur, on multipliera les deux termes par $\sqrt{5}+1$, & on obtiendra $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$ $=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Réponſe. Le plus grand des nombres cherchés, ou x, $=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; & le plus petit, y, $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainſi leur ſomme $x+y=2$

$+\sqrt{5}$; leur produit $xy=2+\sqrt{5}$; & puisque $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, & $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on a aussi la différence des quarrés $xx-yy=2+\sqrt{5}$.

686.

Comme cette solution étoit assez longue, il sera bon de faire remarquer qu'on peut l'abréger. Qu'on commence par faire la somme $x+y$ égale à la différence des quarrés $xx-yy$, on aura $x+y=xx-yy$; & divisant par $x+y$, à cause de $xx-yy=(x+y)(x-y)$, on trouve $1=x-y$ & $x=y+1$. Par conséquent $x+y=2y+1$, & $xx-yy=2y+1$; de plus le produit xy ou $yy+y$ devant être égal à la même quantité, on a $yy+y=2y+1$, ou $yy=y+1$, ce qui donne, comme ci-dessus, $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

687.

5°. La question précédente nous conduit à considérer encore celle-ci: Trouver deux

nombres tels, qu'il y ait égalité entre leur somme, leur produit & la somme de leurs quarrés.

Nommons x & y les nombres cherchés; il faut qu'il y ait égalité entre I.) $x+y$, II.) xy, & III.) $xx+yy$.

Comparant la premiere & la seconde formule, nous avons $x+y=xy$, d'où nous tirons $x=\frac{y}{y-1}$; par conséquent xy ou $x+y$ $=\frac{yy}{y-1}$. Or la même quantité équivaut à $xx+yy$, ainsi nous avons $\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$ $=\frac{yy}{y-1}$. Multipliant par $yy-2y+1$, le produit est $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$, ou $y^4=3y^3-3yy$; & en divisant par yy, nous avons $yy=3y-3$; ce qui donne $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3}=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$; par conséquent $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, d'où résulte $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$; & en multipliant les deux termes par $1-\sqrt{-3}$, le résultat est $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ ou $\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Réponse. Donc les deux nombres cherchés sont $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, & $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, leur somme est $x+y=3$, leur produit $xy=3$;

enfin, puisque $xx = \frac{3-3\sqrt{-3}}{3}$ & $yy = \frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, la somme des quarrés $xx + yy = 3$.

688.

On peut abréger considérablement ce calcul par un artifice particulier, qui est applicable aussi dans d'autres cas. Il consiste à exprimer les nombres cherchés par la somme & par la différence de deux lettres, au lieu de les indiquer par des lettres simples.

Qu'on suppose, dans notre derniere question, l'un des nombres cherchés $= p + q$, & l'autre $= p - q$, leur somme sera $2p$, leur produit sera $pp - qq$, & la somme de leurs quarrés sera $= 2pp + 2qq$, & ces trois quantités doivent être égales entr'elles. Égalant d'abord la premiere à la seconde, on a $2p = pp - qq$, ce qui donne $qq = pp - 2p$. Substituant cette valeur de qq dans la troisieme quantité, & comparant le résultat $4pp - 4p$ avec la premiere, on a $2p = 4pp - 4p$, d'où l'on tire $p = \frac{3}{2}$.

Par conséquent $qq = -\frac{3}{4}$, & $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; de sorte que les nombres que nous cherchons sont $p + q = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, & $p - q = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, comme nous les avons trouvés ci dessus.

CHAPITRE IX.

De la nature des Equations du second degré.

689.

On a vu suffisamment par ce qui précede, que les équations du second degré sont résolubles de deux manieres; & cette propriété mérite à tous égards d'être examinée, parce que la nature des équations d'un degré supérieur ne peut que recevoir par-là beaucoup de jour. Nous remonterons donc avec plus d'attention aux causes qui font que toute équation du second degré admet une double solution; elles renferment indubitablement une propriété essentielle de ces équations.

690.

690.

Il eſt vrai que nous avons déjà vû que cette double ſolution provient de ce que la racine quarrée d'un nombre quelconque peut être priſe, ſoit poſitive, ſoit négative; cependant, comme ce principe ne s'appliqueroit pas aiſément à des équations de dimenſions plus hautes, il ſera bon de développer clairement la même propriété encore d'une autre maniere. Nous prendrons pour exemple l'équation du ſecond degré, $xx = 12x - 35$, & nous donnerons une nouvelle raiſon, par laquelle cette équation eſt réſoluble de deux façons, en admettant pour x les deux valeurs 5 & 7 qui lui ſatisfont également.

691.

Il eſt plus convenable pour notre but, de commencer par tranſpoſer les termes de l'équation, de maniere qu'un des membres devienne o; cette équation prend par

conséquent la forme $xx - 12x + 35 = 0$; & il s'agit à présent de trouver un nombre tel que, si on le substitue à x, la formule $xx - 12x + 35$ se réduise effectivement à rien; il sera question après cela de montrer pourquoi cela peut se faire de deux manieres.

692.

Or le tout consiste ici à faire voir avec clarté, qu'une quantité de la forme $xx - 12x + 35$ peut être envisagée comme le produit de deux facteurs; ainsi en effet la formule dont nous parlons *est composée* des deux facteurs $(x-5).(x-7)$. Car puisque cette quantité doit se réduire à 0, il faut aussi que le produit $(x-5).(x-7) = 0$; mais un produit, de quelque nombre de facteurs qu'il soit composé, devient $= 0$, lors même qu'un seul de ces facteurs se réduit à 0; c'est un principe fondamental auquel il faut faire attention, sur-tout quand il s'agit d'équations de plusieurs degrés.

693.

On comprend donc aiſément, que le produit $(x-5).(x-7)$ peut devenir o de deux façons : l'une, quand le premier facteur $x-5=0$; l'autre, quand le ſecond facteur $x-7=0$. Dans le premier cas $x=5$, dans l'autre cas $x=7$. La raiſon eſt donc très-claire, pourquoi une telle équation $xx-12x+35=0$, admet deux ſolutions; c'eſt-à-dire, pourquoi on peut aſſigner pour x deux valeurs qui ſatisfont également à l'équation. Cette raiſon fondamentale conſiſte en ce que la formule $xx-12x+35$ peut être repréſentée par le produit de deux facteurs.

694.

Les mêmes circonſtances ſe retrouvent dans toutes les équations du ſecond degré. Car, après avoir porté tous les termes d'un même côté, on ne manque jamais de parvenir à une équation de la forme $xx-ax$

$+b=0$, & cette formule peut toujours être regardée pareillement comme le produit de deux facteurs, que nous repréſenterons par $(x-p)x-q$, ſans nous embarraſſer quels nombres ſont les valeurs de p & de q. Or ce produit devant être $=0$ par la nature de notre équation, il *eſt clair* que cela peut arriver de deux manieres: en premier lieu, lorſque $x=p$; & en ſecond lieu, lorſque $x=q$; & ce ſont-là les deux valeurs de x qui ſatisfont à l'équation.

695.

Voyons maintenant de *quelle nature* doivent être ces deux facteurs, pour que la multiplication de l'un par l'autre reproduiſe exactement notre formule $xx-ax+b$. Nous trouvons, en les multipliant réellement, $xx-(p+q)x+pq$; or cette quantité doit être la même choſe que $xx-ax+b$, il faut donc évidemment que $p+q=a$, & $pq=b$. Ainſi nous apprenons cette propriété bien remarquable, que dans

toute équation de la forme $xx - ax + b = 0$, les deux valeurs de x sont telles que leur somme est égale à a, & leur produit égal à b; d'où il suit que, dès qu'on connoît l'une des valeurs, on trouve aussi l'autre facilement.

696.

Nous venons de considérer le cas où les deux valeurs de x sont positives, & qui exige que le second terme de l'équation ait le signe $-$, & que le troisieme terme ait le signe $+$. Considérons donc aussi les cas dans lesquels soit l'une ou toutes les deux valeurs de x deviennent négatives. Le premier de ces cas a lieu, lorsque les deux facteurs de l'équation donnent un produit de cette forme $(x-p)(x+q)$; car alors les deux valeurs de x sont $x=p$ & $x=-q$; l'équation elle-même devient $xx+(q-p)x-pq=0$; le second terme a le signe $+$, quand q est plus grand que p, & le signe $-$, quand q est plus petit que p; enfin le troisieme terme est toujours négatif.

Le fecond cas, où les deux valeurs de x font négatives, a lieu, lorfque les deux facteurs font $(x+p)$ $(x+q)$; car on a $x=-p$ & $x=-q$; l'équation elle-même devient $xx+(p+q)x+pq=0$, où le fecond comme le troifieme terme font affectés du figne $+$.

697.

Les fignes du fecond & du troifieme terme nous font connoître par conféquent la qualité des racines d'une équation quelconque du fecond degré. Soit l'équation $xx \ldots ax \ldots b=0$: fi le fecond & le troifieme terme ont le figne $+$, *les deux valeurs* de x font négatives ; fi le fecond terme a le figne $-$, & que le troifieme terme ait $+$, les deux valeurs font pofitives ; enfin, fi le troifieme terme affecte de même le figne $-$, une des valeurs en queftion eft pofitive. Mais dans tous les cas au refte le fecond terme contient la fomme des deux valeurs, & le troifieme terme contient leur produit.

698.

On trouvera très-facile, après ce qui a été dit, de former des équations du second degré qui renferment deux valeurs données à volonté. On demande, par exemple, une équation telle que l'une des valeurs de x soit 7, & que l'autre soit -3. Qu'on forme d'abord les équations simples $x=7$ & $x=-3$; ensuite de-là celles-ci, $x-7=0$ & $x+3=0$, on aura de cette maniere les facteurs de l'équation cherchée, laquelle devient par conséquent $xx-4x-21=0$. Aussi en appliquant ici la regle donnée plus haut, trouve-t-on les deux valeurs de x supposées; car si $xx=4x+21$, on a $x=2\pm\sqrt{25}=2\pm5$, c'est-à-dire $x=7$, ou $x=-3$.

699.

Il peut arriver aussi que les valeurs de x deviennent égales : qu'on cherche, par exemple, une équation où ces deux valeurs soient $=5$, les deux facteurs seront $(x-5)$

$(x - 5)$, & l'équation cherchée sera $xx - 10x + 25 = 0$. Dans cette équation x paroît n'avoir qu'une valeur ; mais c'est que x se trouve doublement $= 5$, comme la solution ordinaire le fait voir pareillement ; car on a $xx = 10x - 25$; donc $x = 5 \pm \sqrt{0} = 5 \pm 0$, c'est-à-dire que x est de deux façons $= 5$.

700.

Un cas remarquable sur-tout, & qui arrive quelquefois, c'est celui où les deux valeurs de x deviennent imaginaires ou impossibles ; car il est tout-à-fait impossible alors d'assigner pour x une valeur telle qu'elle satisfasse à l'équation. Qu'on se propose, par exemple, de partager le nombre 10 en deux parties, telles que leur produit soit 30 ; si on nomme x une de ces parties, l'autre sera $= 10 - x$, & leur produit sera $10x - xx = 30$; donc $xx = 10x - 30$, & $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, ce qui est un nombre imaginaire qui apprend que la question est impossible.

701.

Il eſt donc très-important de trouver un ſigne auquel on puiſſe reconnoître ſur le champ ſi une équation du ſecond degré eſt poſſible ou ſi elle ne l'eſt pas.

Reprenons l'équation générale $xx - ax + b = 0$, nous aurons $xx = ax - b$, & $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$. On voit par-là que ſi b eſt plus grand que $\frac{1}{4}aa$, ou $4b$ plus grand que aa, les deux valeurs de x deviennent toujours imaginaires, vu qu'il s'agiroit d'extraire la racine quarrée d'une quantité négative; & au contraire, que ſi b eſt plus petit que $\frac{1}{4}aa$, ou même plus petit que o, c'eſt-à-dire que ce ſoit un nombre négatif, les deux valeurs ſeront poſſibles ou réelles. Au reſte, qu'elles ſoient réelles ou qu'elles ſoient imaginaires, il n'en eſt pas moins vrai qu'on pourra toujours les exprimer, & qu'elles ont auſſi toujours la propriété que leur ſomme eſt $= a$, & leur produit $= b$. Dans l'équation $xx - 6x + 10 = 0$;

par exemple, la ſomme des deux valeurs de x doit être $=6$, & le produit de ces deux valeurs doit être $=10$; or on trouve, I.) $x=3+\sqrt{-1}$, & II.) $x=3-\sqrt{-1}$, quantités dont la ſomme $=6$, & le produit $=10$.

702.

Le caractere que nous venons de trouver peut s'exprimer d'une maniere encore plus générale, & de façon à pouvoir même être appliqué aux équations de cette forme, $fxx\pm gx+h=0$; car cette équation donne $xx=\mp\frac{gx}{f}-\frac{h}{f}$, & $x=\mp\frac{g}{2f}\pm\sqrt{\frac{gg}{4ff}-\frac{h}{f}}$, ou $x=\frac{\mp g\pm\sqrt{gg-4hf}}{2f}$; d'où l'on infere que les deux valeurs ſont imaginaires, & par conſéquent l'équation impoſſible, quand $4fh$ eſt plus grand que gg; c'eſt-à-dire, lorſque dans l'équation $fxx-gx+h=0$, le quadruple du produit du premier & du dernier terme ſurpaſſe le quarré du ſecond terme; car ce produit du premier & du dernier terme, pris quatre fois, eſt $4fhxx$, & le

quarré du terme moyen eſt $ggxx$; or ſi $4fhxx$ eſt plus grand que $ggxx$, $4fh$ eſt auſſi plus grand que gg, & dans ce cas l'équation eſt évidemment impoſſible. Dans tous les autres cas l'équation eſt poſſible, & on peut aſſigner deux valeurs réelles pour x; il eſt vrai que ſouvent elles deviennent irrationnelles; mais nous avons vu plus haut que dans ces cas on ne laiſſe pas de pouvoir les connoître en approchant autant qu'on veût; au lieu qu'aucune approximation ne ſauroit avoir lieu pour les expreſſions imaginaires, telles que $\sqrt{-5}$; car 100 eſt auſſi éloigné d'être la valeur de cette racine, que l'eſt 1 ou un autre nombre quelconque.

703.

Nous avons encore à faire remarquer qu'une formule quelconque du ſecond degré, $xx \pm ax \pm b$, eſt toujours néceſſairement réſoluble en deux facteurs, tels que $(x \pm p)(x \pm q)$. Car ſi l'on prenoit trois

facteurs pareils à ceux-là, on parviendroit à une quantité du troisieme degré, & en ne prenant qu'un seul facteur pareil, on ne passeroit pas le premier degré.

C'est donc un point qui est au-dessus de toute contestation, que toute équation du second degré renferme nécessairement deux valeurs de x, & qu'il ne peut y en avoir moins ou davantage.

704.

Nous avons déjà vu que quand on a trouvé les deux facteurs, on connoît aussi les deux valeurs de x, vu que *chaque facteur* donne une de ces valeurs, quand on le suppose $=0$. L'inverse a lieu pareillement, c'est-à-dire que dès qu'on a trouvé une valeur de x, on connoît aussi un des facteurs de l'équation; car si $x=p$ indique une des valeurs de x dans une équation quelconque du second degré, $x-p$ est un des facteurs de cette équation; c'est-à-dire que tous les termes ayant été portés du

même côté, l'équation eſt diviſible par $x-p$, & qui plus eſt, le quotient exprime l'autre facteur.

705.

Soit donnée, pour éclaircir mieux ce que nous venons de dire, l'équation $xx + 4x - 21 = 0$, de laquelle nous ſavons que $x = 3$ eſt une des valeurs de x, parce que $3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 21 = 0$; cela nous fait juger que $x - 3$ eſt un des facteurs de cette équation, ou que $xx + 4x - 21$ eſt diviſible par $x - 3$, & en effet la diviſion ſuivante le fait voir.

$$
\begin{array}{l}
x-3)\ xx+4x-21\ (x+7 \\
\quad\quad \underline{xx-3x} \\
\quad\quad\quad\quad 7x-21 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{7x-21} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0.
\end{array}
$$

Ainſi l'autre facteur eſt $x + 7$, & notre équation ſe repréſente par le produit $(x-3)(x+7) = 0$; d'où s'enſuivent immédiatement les deux valeurs de x, le premier facteur donnant $x = 3$, & l'autre facteur donnant $x = -7$.

CHAPITRE X.

Des Equations pures du troisieme degré.

706.

ON dit d'une équation du troisieme degré, qu'elle est *pure*, lorsque le cube de la quantité inconnue est égal à une quantité connue, sans que ni le quarré de l'inconnue ni l'inconnue même se trouvent dans l'équation.

$x^3=125$, ou plus généralement $x^3=a$, $x^3=\frac{a}{b}$, sont des équations de ce genre.

707.

Il est clair comment on doit tirer la valeur de x d'une telle équation, vu qu'on n'a besoin que d'extraire des deux côtés la racine cubique. L'équation $x^3=125$ donne $x=5$, l'équation $x^3=a$ donne $x=\sqrt[3]{a}$, & l'équation $x^3=\frac{a}{b}$ donne $x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, ou x

$= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Il ſuffit donc qu'on ait appris à extraire la racine cubique d'un nombre propoſé, pour qu'on ſoit en état de réſoudre de ſemblables équations.

708.

On n'obtient de cette matiere qu'une ſeule valeur pour x ; cependant toute équation du ſecond degré ayant deux valeurs, on eſt fondé à ſoupçonner qu'une équation du troiſieme degré a pareillement plus d'une valeur ; il vaudra donc la peine d'approfondir la choſe, & en cas qu'on trouve qu'une telle équation doit avoir pluſieurs valeurs pour x, de déterminer ces valeurs.

709.

Conſidérons, par exemple, l'équation $x^3 = 8$, dans la vue d'en conclure tous les nombres dont le cube eſt 8. Comme $x = 2$ eſt ſans contredit un tel nombre, il faut, d'après le Chapitre précédent, que la formule $x^3 - 8 = 0$, ſoit néceſſairement

divisible par $x-2$. Faisons donc cette division :

$$
\begin{array}{l}
x-2)\; x^3-8 \quad (xx+2x+4 \\
\quad\quad\; x^3-2xx \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 2xx-8 \\
\quad\quad\quad\quad 2xx-4x \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 4x-8 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 4x-8 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0.
\end{array}
$$

Il s'ensuit que notre équation $x^3-8=0$ peut se représenter par ces facteurs-ci :

$$(x-2)\;(xx+2x+4)=0.$$

710.

Or la question est de savoir quel nombre on doit substituer à la place de x, pour que $x^3=8$, ou que $x^3-8=0$; & il est clair qu'on satisfait à cette condition, en supposant $=0$ le produit que nous venons de trouver; mais cela arrive non-seulement quand le premier facteur $x-2=0$, d'où résulte $x=2$, mais aussi quand le second facteur

facteur $xx+2x+4=0$. Qu'on fasse donc $xx+2x+4=0$, on aura $xx=-2x-4$, & de là $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

711.

Outre le cas donc où $x=2$, qui satisfait à l'équation $x^3=8$, nous avons encore pour x deux autres valeurs dont les cubes sont pareillement 8, & qui sont : I.) $x=-1+\sqrt{-3}$, & II.) $x=-1-\sqrt{-3}$.

On n'en doutera plus, si on prend les cubes effectivement comme nous allons faire :

$$\begin{array}{r}
-1+\sqrt{-3}\\
-1+\sqrt{-3}\\
\hline
1-\sqrt{-3}\\
-\sqrt{-3}-3\\
\hline
-2-2\sqrt{-3}\ \text{quarré}\\
-1+\sqrt{-3}\\
\hline
2+2\sqrt{-3}\\
-2\sqrt{-3}+6\\
\hline
8\ \text{cube.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
-1-\sqrt{-3}\\
-1-\sqrt{-3}\\
\hline
1+\sqrt{-3}\\
+\sqrt{-3}-3\\
\hline
-2+2\sqrt{-3}\\
-1-\sqrt{-3}\\
\hline
2-2\sqrt{-3}\\
+2\sqrt{-3}+6\\
\hline
8.
\end{array}$$

Il eſt vrai que ces deux valeurs *ſont* imaginaires ou impoſſibles ; mais elles méritent cependant qu'on y faſſe attention.

712.

Ce que nous venons de voir a lieu en général pour toute équation cubique, telle que $x^3 = a$; on trouvera toujours outre la valeur $x = \sqrt[3]{a}$, encore deux autres valeurs. Qu'on ſuppoſe, pour abréger, $\sqrt[3]{a} = c$, de ſorte que $a = c^3$, notre équation prendra cette forme, $x^3 - c^3 = 0$, qui ſera diviſible par $x - c$, comme la diviſion *effective* le fait voir :

$$\begin{array}{l} x-c)\; x^3 - c^3\; (xx + cx + cc \\ \quad\quad\; \underline{x^3 - cxx} \\ \quad\quad\quad\quad\; cxx - c^3 \\ \quad\quad\quad\quad\; \underline{cxx - ccx} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\; ccx - c^3 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \underline{ccx - c^3} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0. \end{array}$$

Par conséquent l'équation en question peut être représentée par le produit $(x-c)$ $(xx+cx+cc)=o$, qui est en effet $=o$, non-seulement lorsque $x-c=o$, ou $x=c$, mais aussi quand $xx+cx+cc=o$. Or cette formule contient deux autres valeurs de x; car elle donne $xx=-cx-cc$, & $x=-\frac{c}{2}$ $\pm\sqrt{\frac{cc}{4}-cc}$, ou $x=\frac{-c\pm\sqrt{-3cc}}{2}$, c'est-à-dire, $x=\frac{-c\pm c\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.c$.

713.

Or comme c avoit été mis à la place de $\sqrt[3]{a}$, nous en inférons que toute équation du troisieme degré, de la forme $x^3=a$, fournit trois valeurs pour x exprimées de la maniere suivante :

$$\text{I.)}\ x=\sqrt[3]{a},\ \text{II.)}\ x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{a},$$
$$\text{III.)}\ x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{a}.$$

On voit par-là que chaque racine cubique a trois différentes valeurs; mais qu'une seule est réelle ou possible, les deux autres

étant impossibles. Cela est d'autant plus à remarquer, que toute racine quarrée a deux valeurs, & que nous verrons plus bas qu'une racine bi-quarrée a quatre valeurs différentes, qu'une racine cinquieme a cinq valeurs, & ainsi de suite.

Il est vrai que dans les calculs ordinaires on n'emploie que la premiere de ces trois valeurs, parce que les deux autres sont imaginaires; c'est ce que nous confirmerons par quelques exemples.

714.

Premiere question. Trouver un nombre tel que son quarré multiplié par son quart produise 432.

Que x soit ce nombre, il faut que le produit de xx multiplié par $\frac{1}{4}x$ soit égal au nombre 432, c'est-à-dire que $\frac{1}{4}x^3 = 432$, & que $x^3 = 1728$. Qu'on extraie la racine cubique, on aura $x = 12$.

Réponse. Le nombre cherché est 12; car son quarré 144, multiplié par son quart ou par 3, donne 432.

715.

Seconde question. Je cherche un nombre tel, qu'en divisant sa quatrieme puissance par sa moitié, & en ajoutant $14\frac{1}{4}$ au produit, il me vienne 100.

Je nommerai ce nombre x; sa quatrieme puissance sera x^4; divisant par la moitié $\frac{1}{2}x$, j'ai $2x^3$, & il faut qu'en ajoutant $14\frac{1}{4}$, la somme soit 100; j'ai donc $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$; soustrayant $14\frac{1}{4}$, il reste $2x^3 = \frac{343}{4}$; divisant par 2, j'ai $x^3 = \frac{343}{8}$, & prenant la racine cubique, j'obtiens enfin $x = \frac{7}{2}$.

716.

Troisieme question. Quelques Capitaines se trouvent en campagne; chacun commande à trois fois autant de Cavaliers, & à vingt fois autant de Fantassins qu'ils sont de Capitaines. Un Cavalier reçoit chaque mois pour sa paye autant de florins qu'il y a de Capitaines, & chaque Fantassin reçoit

la moitié de cette paye ; la dépense totale par mois est de 13000 florins ; on demande combien il y a de Capitaines ?

Soit x le nombre cherché, chaque Capitaine aura sous lui $3x$ Cavaliers & $20x$ Fantassins. Ainsi le nombre total des Cavaliers est $3xx$, & celui des Fantassins est $20xx$. Or, chaque Cavalier recevant par mois x florins, & chaque Fantassin recevant $\frac{1}{2}x$ flor. la paye des Cavaliers, à chaque mois, se monte à $3x^3$, & celle des Fantassins est $10x^3$; ils reçoivent donc tous ensemble $13x^3$ flor. & cette somme doit équivaloir à 13000 florins ; *on a donc* $13x^3 = 13000$, ou $x^3 = 1000$, & $x = 10$, nombre cherché des Capitaines.

717.

Quatrieme question. Quelques Négocians entrent en société, & chacun contribue cent fois autant qu'il y a d'Associés ; ils envoient un Facteur à Venise pour faire valoir ce capital ; ce Facteur gagne pour cent

ſequins deux fois autant de ſequins qu'il y a d'Intéreſſés, & il revient avec 2662 ſequins de profit; on demande le nombre des Aſſociés?

Si ce nombre eſt ſuppoſé $=x$, chacun des Négocians aſſociés aura fourni $100x$ ſequins, & le capital entier aura été de $100xx$ ſequins; or le profit étant de $2x$ pour 100, le capital aura rapporté $2x^3$; ainſi il faut faire $2x^3=2662$, ou $x^3=1331$; cela donne $x=11$, & c'eſt le nombre des Aſſociés.

718.

Cinquieme queſt. Une Payſanne échange des fromages contre des poules, à raiſon de deux fromages pour trois poules; ces poules pondent chacune $\frac{1}{3}$ autant d'œufs qu'il y a de poules; la Payſanne vend au marché neuf œufs pour autant de ſous que chaque poule a pondu d'œufs, & elle tire 72 ſous; on demande combien de fromages elle a échangé?

Soit le nombre des fromages $= x$, celui des poules que la Payſanne aura reçues en échange ſera $= \frac{3}{2}x$, & chaque poule pondant $\frac{1}{2}x$ œufs, le nombre des œufs ſera $= \frac{3}{4}xx$. Or neuf œufs ſe vendent pour $\frac{1}{2}x$ ſous, ainſi l'argent que $\frac{3}{4}xx$ œufs produiſent, eſt $\frac{1}{24}x^3$, & il faut que $\frac{1}{24}x^3 = 72$. Par conſéquent $x^3 = 24.72 = 8.3.8.9 = 8.8.27$, & $x = 12$; c'eſt-à-dire que la Payſanne a échangé douze fromages contre dix-huit poules.

CHAPITRE XI.

De la réſolution des Equations complettes du troiſieme degré.

719.

UNE équation du troiſieme degré eſt dite *complette*, lorſqu'elle renferme, outre le cube de l'inconnue, auſſi cette quantité inconnue elle-même, & le quarré de cette

quantité ; de forte que la formule générale pour toutes ces équations, en portant tous les termes d'un même côté, eſt

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0.$$

C'eſt à faire voir comment on doit tirer de telles équations les valeurs de x, qu'on nomme auſſi les *racines* de l'équation, que nous deſtinons ce Chapitre. Nous ſuppoſerons qu'on n'a aucun doute qu'une telle équation n'ait trois racines, après que nous avons fait voir dans le Chapitre précédent que cela eſt vrai à l'égard des équations pures du même degré.

720.

Nous conſidérerons d'abord l'équation $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; & de même qu'une équation du ſecond degré peut être regardée comme étant le produit de deux facteurs, on peut repréſenter une équation du troiſieme degré par le produit de trois facteurs qui ſont dans notre cas, $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$; puiſqu'en les mul-

tipliant effectivement on parvient à l'équation donnée; car $(x-1).(x-2)$ donne $xx-3x+2$, & multipliant ceci par $x-3$ on trouve $x^3-6xx+11x-6$, ce qui est en effet la formule prescrite, & qui doit être $=0$. Or, cela a lieu par conséquent, quand le produit $(x-1)(x-2)(x-3)$ se réduit à rien; & comme il suffit pour cet effet qu'un seul de ces facteurs soit $=0$, trois différens cas peuvent donner ce résultat, savoir $x-1=0$, ou $x=1$; en second lieu, $x-2=0$, ou $x=2$; & en troisieme lieu, $x-3=0$, ou $x=3$.

On voit sur le champ aussi, *que si on substituoit à la place de x un nombre quelconque, autre qu'un des trois ci-dessus, aucun des trois facteurs ne deviendroit $=0$, & par conséquent que le produit ne deviendroit pas o non plus*; ce qui prouve que notre équation ne peut avoir d'autre racine que ces trois racines-là.

721.

Si l'on pouvoit dans tout autre cas assigner de même les trois facteurs d'une telle équation, on auroit immédiatement ses trois racines. Considérons donc d'une maniere plus générale ces trois facteurs, $x - p$, $x - q$, $x - r$; si nous cherchons leur produit, le premier multiplié par le second donne $xx - (p + q)x + pq$, & ce produit multiplié par $x - r$ fait $x^3 - (p + q + r) xx + (pq + pr + qr) x - pqr$.

Or si cette formule doit devenir $= 0$, cela peut arriver dans trois cas: le premier est celui où $x - p = 0$, où $x = p$; le second a lieu quand $x - q = 0$, ou $x = q$; le troisieme cas est celui de $x - r = 0$, ou de $x = r$.

722.

Représentons maintenant la formule trouvée par l'équation $x^3 - axx + bx - c = 0$; il est clair que pour que ses trois racines soient

I.) $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, il faut 1°. que $a=p+q+r$, 2°. que $b=pq+pr+qr$, & 3°. que $c=pqr$. Ainſi nous apprenons par-là que le ſecond terme contient la ſomme des trois racines, que le troiſieme terme contient la ſomme des produits des racines priſes deux à deux, enfin *que* le quatrieme terme eſt formé du produit *de* toutes les trois racines multipliées les unes par les autres.

Cette derniere propriété nous préſente auſſi-tôt une vérité importante, qui eſt qu'une équation du troiſieme degré ne peut certainement avoir d'autres *racines rationnelles* que des diviſeurs du dernier terme; car puiſque ce terme eſt le produit des trois racines, il faut qu'il ſoit diviſible par chacune d'elles. On voit donc ſur le champ, lorſqu'on veut chercher une racine par le tâtonnement, de quels nombres on doit faire l'eſſai (*).

(*) On verra dans la ſuite, que cette propriété eſt générale pour les équations d'un degré quelconque. Au

Si nous considérons, pour nous expliquer mieux, l'équation $x^3 = x + 6$, ou $x^3 - x - 6 = 0$, comme cette équation ne peut avoir d'autres racines rationnelles que des nombres qui sont facteurs du dernier terme 6, nous n'avons besoin d'essayer que les nombres 1, 2, 3, 6, & voici le détail de ces essais :

I.) Si $x = 1$, on a $1 - 1 - 6 = -6$.

II.) Si $x = 2$, on a $8 - 2 - 6 = 0$.

III.) Si $x = 3$, on a $27 - 3 - 6 = 18$.

IV.) Si $x = 6$, on a $216 - 6 - 6 = 204$.

Nous voyons par-là que $x = 2$ est une des racines de l'équation proposée, & sachant cela il nous est facile de trouver les deux autres ; car $x = 2$ étant une des racines, $x - 2$ est un facteur de l'équation, & on n'a donc qu'à chercher l'autre facteur par la voie de la Division, ainsi que nous allons le faire :

reste comme ce tâtonnement exige qu'on connoisse tous les diviseurs du dernier terme de l'équation, on peut avoir recours pour cela aux tables indiquées à l'art. 66.

$$
\begin{array}{r|l}
x-2) & x^3-x-6\,(xx+2x+3 \\
& \underline{x^3-2xx} \\
& \quad 2xx-x-6 \\
& \quad \underline{2xx-4x} \\
& \qquad 3x-6 \\
& \qquad \underline{3x-6} \\
& \qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Puis donc que notre formule se représente par le produit $(x-2)(xx+2x+3)$, elle deviendra $=0$, non-seulement quand $x-2=0$, mais aussi quand $xx+2x+3=0$. Or ce dernier facteur donne $xx=-2x-3$, & par conséquent $x=-1\pm\sqrt{-2}$. Ce sont donc ici les deux autres racines de notre équation, lesquelles sont, comme on le voit, impossibles ou imaginaires.

723.

La méthode que nous venons d'indiquer, n'est applicable immédiatement que lorsque le premier terme x^3 est multiplié par 1,

& que les autres termes de l'équation ont pour coefficiens des nombres entiers. Quand cette condition n'a pas lieu, il faut commencer par une préparation qui consiste à transformer l'équation en une autre qui ait la condition requise, après quoi on fait l'essai que nous avons dit.

Soit donnée, par exemple, l'équation $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$; comme elle renferme des quarts, qu'on fasse $x = \frac{y}{2}$, on aura $\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0$, & en multipliant par 8, on obtiendra l'équation $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, dont les racines sont, comme nous l'avons vu plus haut, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$; d'où il s'ensuit que dans l'équation proposée on a I.) $x = \frac{1}{2}$, II.) $x = 1$, III.) $x = \frac{3}{2}$.

724.

Qu'on ait une équation, dont le premier terme ait pour coefficient un nombre entier autre que 1, & dont le dernier terme

soit 1; par exemple, $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$; si on divise par 6, on aura $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$; on pourroit purger cette équation des fractions, par la regle que nous venons de donner, en supposant $x = \frac{y}{6}$; car on auroit $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$; & en multipliant par 216, il viendroit $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Mais comme il seroit trop long de faire l'essai avec tous les diviseurs du nombre 36, remarquons que puisque le dernier terme de l'équation primitive est 1, il vaut mieux supposer dans cette équation $x = \frac{1}{z}$; car on aura l'équation $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, qui multipliée par z^3 donne $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$, & en transposant tous les termes, $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$. Les racines sont ici (158) $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; d'où il suit que dans notre équation $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

725.

725.

On aura obſervé dans les articles précédens, que pour que les racines ſoient toutes des nombres poſitifs, il faut que les ſignes *plus* & *moins* ſe ſuivent alternativement; moyennant quoi l'équation prend cette forme, $x^3 - axx + bx - c = 0$, dans laquelle les ſignes changent autant de fois qu'il y a de racines poſitives. Si toutes les trois racines euſſent été négatives, & qu'on eût multiplié entr'eux les trois facteurs $x+p$, $x+q$, $x+r$, tous les termes auroient eu le ſigne *plus*, & la forme de l'équation auroit été $x^3 + axx + bx + c = 0$, où on voit les mêmes ſignes ſe ſuivre *trois* fois, c'eſt-à-dire, le nombre des racines négatives.

On a donc conclu qu'autant de fois que les ſignes changent, autant l'équation a de racines poſitives, & qu'autant de fois les mêmes ſignes ſe ſuccedent, autant l'équation a de racines négatives; & cette

remarque eſt très-importante, parce qu'on ſait par-là ſi c'eſt en *plus* ou en *moins* qu'on doit prendre les diviſeurs du dernier terme, quand on veut faire l'eſſai dont nous avons parlé.

726.

Conſidérons, afin d'éclaircir par un exemple ce que nous venons de dire, l'équation $x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, dans laquelle les ſignes changent deux fois, & où ce n'eſt qu'une fois que le même *ſigne* revient. Nous concluons que l'équation a deux racines poſitives & une *racine négative*, & comme ces racines doivent être des diviſeurs du dernier terme 56, il faut qu'elles ſoient compriſes dans les nombres $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$.

Si nous faiſons maintenant $x = 2$, nous avons $8 + 4 - 68 + 56 = 0$; d'où nous concluons que $x = 2$ eſt une racine poſitive, & qu'ainſi $x - 2$ eſt un diviſeur de notre équation, au moyen de quoi nous trouvons

facilement les deux autres racines; car divisant effectivement par $x-2$, on a

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3+xx-34x+56\ (xx+3x-28 \\
\quad x^3-2xx \\
\hline
\quad\quad 3xx-34x+56 \\
\quad\quad 3xx-\ \ 6x \\
\hline
\quad\quad\quad -28x+56 \\
\quad\quad\quad -28x+56 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0.
\end{array}
$$

Et si on fait ce quotient $xx+3x-28=0$, on trouve les deux autres racines, qui seront $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+28}=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, c'est-à-dire $x=4$ & $x=-7$; & tenant compte de la racine trouvée ci-dessus, $x=2$, on voit clairement qu'en effet l'équation a deux racines positives & une négative. Nous donnerons encore quelques autres exemples pour rendre la chose plus évidente.

727.

Premiere question. On a deux nombres, leur différence est 12, leur produit mul-

tiplié par leur ſomme fait 14560. Quels ſont ces nombres?

Soit x le plus petit des deux nombres, le plus grand ſera $x+12$, leur produit, $=xx+12x$, multiplié par la ſomme $2x+12$, donne $2x^3+36xx+144x=14560$; & diviſant par 2, on a $x^3+18xx+72x=7280$.

Or, le dernier terme 7280 eſt trop grand pour qu'on puiſſe entreprendre l'eſſai de tous ſes diviſeurs, & nous remarquons qu'il eſt diviſible par 8; c'eſt pourquoi on fera $x=2y$, parce qu'après la ſubſtitution la nouvelle équation, $8y^3+72yy+144y=7280$, étant diviſée par 8, ſe réduira à celle-ci, $y^3+9yy+18y=910$, pour laquelle on n'a beſoin d'eſſayer que les diviſeurs 1, 2, 5, 7, 10, 13, &c. du nombre 910. Or, il eſt évident que les premiers, 1, 2, 5, ſont trop petits; en commençant donc par la ſuppoſition de $y=7$, on trouve auſſi-tôt que c'eſt là une des racines; car la ſubſtitution donne $343+441+126=910$.

Il ſuit que $x = 14$, & on trouvera les deux autres racines en diviſant $y^3 + 9yy + 18y - 910$ par $y - 7$, ce que nous allons faire :

$$
\begin{array}{l}
y-7)y^3 + 9yy + 18y - 910(yy + 16y + 130 \\
\underline{y^3 - 7yy} \\
\quad 16yy + 18y - 910 \\
\quad \underline{16yy - 112y} \\
\qquad 130y - 910 \\
\qquad \underline{130y - 910} \\
\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Suppoſant maintenant ce quotient $yy + 16y + 130 = 0$, on aura $yy = -16y - 130$, & de là $y = -8 \pm \sqrt{-66}$: preuve que les deux autres racines ſont impoſſibles.

Réponſe. Les deux nombres cherchés ſont 14 & 26 ; leur produit 364, multiplié par leur ſomme 40, donne 14560.

728.

Seconde queſtion. Trouver deux nombres, dont la différence ſoit 18, & qui ſoient tels, que ſi on multiplie enſemble leur

$x = 576$, c'eſt le plus petit des deux nombres cherchés; ainſi le plus grand eſt 1296, & en effet la racine quarrée de celui-ci, ou 36, multipliée par l'autre nombre 576, donne 20736.

730.

Remarque. Cette queſtion admettoit une ſolution plus ſimple; car puiſque la racine quarrée du plus grand nombre, multipliée par le plus petit nombre, doit donner un produit égal à un nombre donné, il faut que le plus grand des deux nombres ſoit un quarré. Si donc, par cette conſidération, nous le ſuppoſons $= xx$, l'autre nombre ſera $xx - 720$. Celui-ci étant multiplié par la racine quarrée du plus grand, ou par x, nous avons $x^3 - 720x = 20736 = 64 . 27 . 12$. Faiſons $x = 4y$, nous aurons $64y^3 - 720 . 4y = 64 . 27 . 12$, ou bien $y^3 - 45y = 27 . 12$. Suppoſant de plus $y = 3z$, nous trouvons $27z^3 - 135z = 27 . 12$, ou en diviſant par 27, $z^3 - 5z = 12$, ou $z^3 - 5z$

$-12=0$. Les diviſeurs de 12, ſont 1, 2, 3, 4, 6, 12; les deux premiers ſont trop petits; mais la ſuppoſition de $z=3$ donne préciſément $27-15-12=0$. Par conſéquent $z=3$, $y=9$ & $x=36$; d'où nous concluons que le plus grand des deux nombres cherchés, ou xx, $=1296$, & que le plus petit, ou $xx-720$, $=576$, comme ci-deſſus.

731.

Quatrieme queſtion. On a deux nombres, dont la différence eſt 12; le produit de cette différence par la ſomme des cubes, eſt 102144: quels ſont ces deux nombres?

Nommant x le plus petit de ces deux nombres, le plus grand eſt $x+12$, le cube du premier eſt x^3, & le cube du ſecond eſt $x^3+36xx+432x+1728$; le produit de la ſomme de ces cubes par la différence 12, eſt

$12(2x^3+36xx+432x+1728)=102144$; diviſant ſucceſſivement par 12 & par 2, on a

$x^3 + 18xx + 216x + 864 = 4256$, ou
$x^3 + 18xx + 216x = 3392 = 8.8.53$.

Qu'on ſuppoſe $x = 2y$, qu'on ſubſtitue & qu'on diviſe par 8, on aura

$$y^3 + 9yy + 54y = 8.53 = 424.$$

Les diviſeurs du dernier membre ſont 1, 2, 4, 8, 53, &c. 1 & 2 ſont trop petits; mais ſi l'on fait $y = 4$, on trouve $64 + 144 + 216 = 424$. De ſorte que $y = 4$ & $x = 8$; d'où l'on conclut que les deux nombres cherchés ſont 8 & 20.

732.

Cinquieme queſtion. Quelques perſonnes forment une ſociété & établiſſent un fonds, auquel chacune contribue dix fois autant d'écus qu'elles ſont de perſonnes; elles gagnent ſur chaque centieme d'écus 6 écus au-delà du nombre d'écus égal à leur nombre; le profit total eſt de 392 écus; on demande combien ils ſont d'Aſſociés?

Soit x le nombre cherché; chaque Aſſocié aura fourni $10x$ écus, & tous

ensemble $10xx$ écus; & puisqu'ils gagnent $x+6$ pour cent, ils auront gagné avec le capital entier, $\frac{x^3+6xx}{10}$, ce qu'il faut égaler à 392.

On a donc $x^3+6xx=3920$, & en faisant $x=2y$ & divisant par 8, $y^3+3yy=490$. Les diviseurs du second membre sont 1, 2, 5, 7, 10, &c. les trois premiers sont trop petits; mais en supposant $y=7$, on a $343+147=490$; de sorte que $y=7$, & $x=14$.

Réponse. Il y avoit quatorze Associés, & chacun d'eux a mis 140 écus dans la masse commune.

733.

Sixieme question. Quelques Négocians ont en commun un capital de 8240 écus; chacun y ajoute quarante fois autant d'écus qu'ils sont d'Associés; ils gagnent avec la somme totale autant de fois pour cent qu'ils sont d'Associés; en partageant le profit, il se trouve qu'après que chacun a pris dix fois

autant d'écus qu'ils sont d'Associés, il reste 224 écus. On demande quel étoit donc le nombre de ces Associés?

Si ce nombre est x, chacun aura ajouté $40x$ écus au capital 8240 écus; par conséquent tous ensemble auront ajouté $40xx$, ce qui a rendu le capital $= 40xx + 8240$; ils gagnent avec cette somme x écus pour cent; ainsi le gain total est $\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100}$ $= \frac{4}{10}x^3 + \frac{824}{10}x = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x$. C'est de cette somme que chacun préleve $10x$, & par conséquent tous ensemble $10xx$, en laissant un reste de 224 écus; *il faut donc* que le profit ait été $10xx + 224$, & qu'on ait l'équation $\frac{2x^3}{5} + \frac{412x}{5} = 10xx + 224$.

Multipliant par 5 & divisant par 2, on a $x^3 + 206x = 25xx + 560$, ou $x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0$: la premiere forme sera cependant plus commode pour essayer. Les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, &c. & il faut les prendre positifs, parce que dans la

ſeconde forme de l'équation les ſignes varient trois fois, ce qui donne à connoître avec certitude que toutes les trois racines ſont poſitives.

Or ſi l'on eſſaye d'abord $x=1$ & $x=2$, il eſt évident que le premier membre deviendroit plus petit que le ſecond. Nous ferons donc l'eſſai des autres diviſeurs.

Quand $x=4$, on a $64+824=400+560$, ce qui ne ſatisfait point.

Quand $x=5$, on a $125+1030=625+560$, ce qui ne ſatisfait pas non plus.

Quand $x=7$, on a $343+1442=1225+560$, ce qui ſatiſfait à l'équation; de ſorte que $x=7$ en eſt une racine. Cherchons donc à préſent les deux autres, en diviſant par $x-7$ la ſeconde forme de notre équation.

$$
\begin{array}{l}
x-7)\; x^3-25xx+206x-560\;(xx-18x+80 \\
\quad\; \underline{x^3-\;7xx} \\
\quad\;\;\; -18xx+206x \\
\quad\;\;\; \underline{-18xx+126x} \\
\qquad\qquad\quad 80x-560 \\
\qquad\qquad\quad \underline{80x-560} \\
\qquad\qquad\qquad\; 0.
\end{array}
$$

Egalant le quotient à zéro, nous avons $xx - 18x + 80 = 0$ ou $xx = 18x - 80$, ce qui donne $x = 9 \pm 1$, de ſorte que les deux autres racines ſont $x = 8$ & $x = 10$.

Réponſe. Trois réponſes ont lieu pour la queſtion propoſée : ſuivant la premiere le nombre des Négocians eſt 7, ſuivant la ſeconde il eſt 8, & ſuivant la troiſieme il eſt 10; le tableau ſuivant préſente la preuve de toutes :

	I.	II.	III.
Nombre des Négocians	7	8	10
Chacun fournit $40x$	280	320	400
Tous enſemble ajoutent $40xx$	1960	2560	4000
L'ancien capital étoit	8240	8240	8240
Le capital entier eſt $40xx + 8240$	10200	10800	12240
Ils gagnent avec ce capital autant pour cent qu'ils ſont d'Aſſociés	714	864	1224
Chacun en ôte $10x$	70	80	100
Ainſi tous enſemble prennent $10xx$	490	640	1000
Donc il reſte	224	224	224

CHAPITRE XII.

De la Regle de CARDAN *ou de* SCIPION FERREO.

734.

LORSQU'ON a chassé les fractions d'une équation du troisieme degré, suivant la maniere enseignée, & qu'aucun des diviseurs du dernier terme ne se trouve être une racine de l'équation, c'est une marque certaine, non-seulement que l'équation n'a pas de racine en nombres entiers, mais qu'une racine fractionnaire même ne peut avoir lieu; c'est ce que nous allons prouver.

Soit l'équation $x^3 - axx + bx - c = 0$, où a, b, c, signifient des nombres entiers; si on vouloit supposer, par exemple, $x = \frac{3}{2}$, on auroit $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$; or le premier terme a seul ici 8 pour dénominateur; tous les autres sont, ou des nombres entiers, ou divisés seulement par 4 ou par 2, &

ne peuvent par conséquent faire o avec le premier terme : la même chose a lieu pour toute autre fraction.

735.

Comme donc dans ces cas les racines de l'équation ne sont ni des nombres entiers, ni des fractions, elles sont irrationnelles, ou même, ce qui arrive souvent, imaginaires. Or, la maniere de les exprimer alors & de déterminer les signes radicaux qui les affectent, fait un point très-important, & qui mérite d'être expliqué ici avec soin. On attribue cette méthode, qu'on nomme *la regle de Cardan*, à *Cardan*, ou plutôt à *Scipion Ferreo*, qui ont vécu il y a quelques siecles (*).

736.

Il faut, pour entrer dans l'esprit de cette regle, considérer d'abord avec attention la nature

(*) L'histoire de cette regle, découverte dans le même temps par *Tartaléa*, se lit avec autant d'intérêt que de fruit dans l'*Histoire des Mathématiques*, par M. *de Montucla*

nature d'un cube, dont la racine eſt un binome.

Soit $a+b$ cette racine, le cube en eſt $x^3+3aab+3abb+b^3$, & nous voyons qu'il eſt compoſé des cubes des deux termes du binome, & outre cela de deux termes moyens, $3aab+3abb$, qui ont le facteur commun $3ab$, lequel multiplie l'autre facteur $a+b$, c'eſt-à-dire que ces deux termes contiennent le triple produit des deux termes du binome, multiplié par la ſomme de ces termes.

737.

Qu'on ſuppoſe maintenant $x=a+b$, & qu'on prenne de part & d'autre le cube, on a $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Or puiſque $a+b=x$, on aura l'équation du troiſieme degré, $x^3=a^3+b^3+3abx$ ou $x^3=3abx+a^3+b^3$, dont nous ſavons qu'une des racines eſt $x=a+b$. Toutes les fois donc qu'il ſe préſente une telle équation, nous pouvons en aſſigner une racine.

Soit par exemple, $a=2$ & $b=3$, on aura l'équation $x^3=18x+35$, que nous savons avec certitude avoir $x=5$ pour racine.

738.

Que de plus on suppose à présent $a^3=p$ & $b^3=q$, on aura $a=\sqrt[3]{p}$ & $b=\sqrt[3]{q}$; par conséquent $ab=\sqrt[3]{pq}$; lors donc que l'on rencontre une équation du troisieme degré de la forme $x^3=3x\sqrt[3]{pq}+p+q$, on sait qu'une des racines est $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

Or on peut toujours déterminer p & q, de maniere que tant $3\sqrt[3]{pq}$ que $p+q$ soient des quantités égales à un nombre donné; ainsi on est toujours en état de résoudre une équation du troisieme degré, de l'espece dont nous parlons.

739.

Soit proposée en général l'équation $x^3=fx+g$; il s'agira ici de comparer f avec

$3\sqrt[3]{pq}$, & g avec $p+q$; c'eſt-à-dire qu'il faudra déterminer p & q de maniere que $3\sqrt[3]{pq}$ devienne égal à f, & que $p+q$ devienne égal à g; car nous ſavons alors qu'une des racines de notre équation ſera $x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

740.

Nous avons donc à réſoudre ces deux équations, I.) $3\sqrt[3]{pq}=f$, & II.) $p+q=g$. La premiere donne $\sqrt[3]{pq}=\frac{f}{3}$, & $pq=\frac{f^3}{27}=\frac{1}{27}f^3$, & $4pq=\frac{4}{27}f^3$. La ſeconde équation étant quarrée, donne $pp+2pq+qq=gg$; ſi l'on en ſouſtrait $4pq=\frac{4}{27}f^3$, on a $pp-2pq+qq=gg-\frac{4}{27}f^3$, & prenant la racine quarrée de part & d'autre, on a $p-q=\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$. Or puiſque $p+q=g$, on a $2p=g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$, & $2q=g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$, par conſéquent $p=\frac{g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}$, & $q=\frac{g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}$

741.

Toutes les fois donc qu'on a une équation du troisieme degré de la forme $x^3 = fx + g$, quels que soient les nombres f & g, on a toujours pour une des racines

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}};$$

c'est-à-dire une quantité irrationnelle, qui renferme non-seulement le signe radical quarré, mais aussi le signe de la racine cubique; & c'est cette formule qu'on nomme proprement la *regle de Cardan.*

742.

Appliquons-la à quelques exemples, pour en mieux faire comprendre l'usage.

Soit $x^3 = 6x + 9$, on aura $f = 6$ & $g = 9$; ainsi $gg = 81$, $f^3 = 216$, & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; puis $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 7$. Donc une des racines de l'équation donnée est $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$.

743.

Soit proposée cette autre équation $x^3 = 3x + 2$; on aura $f = 3$ & $g = 2$; par conséquent $gg = 4$, $f^3 = 27$, & $\frac{4}{27}f^3 = 4$; ce qui nous donne $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 0$; d'où il s'ensuit qu'une des racines est $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

744.

Il arrive souvent cependant que, quoiqu'une telle équation ait une racine rationnelle, on ne peut trouver cette racine par la regle dont nous nous occupons.

Soit donnée l'équation $x^3 = 6x + 40$, où $x = 4$ est une des racines. Nous avons ici $f = 6$ & $g = 40$, de plus $gg = 1600$ & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; ainsi $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$; par conséquent une des racines $x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}}$, ou

$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$; & cette quantité eſt réellement $= 4$, quoiqu'à la premiere inſpection on ne s'en doute pas. En effet le cube de $2 + \sqrt{2}$ étant $20 + 14\sqrt{2}$, on a réciproquement la racine cubique de $20 + 14\sqrt{2}$ égale à $2 + \sqrt{2}$; de même $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$; donc notre racine $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ (*).

745.

On pourroit objecter à cette regle, qu'elle ne s'étend pas à toutes les équations du troiſieme degré, parce *que le quarré* de x ne s'y rencontre point, c'eſt-à-dire

(*) On n'a pas pour l'extraction de la racine cubique de ces binomes, des regles générales comme pour l'extraction de la racine quarrée : celles que différens Auteurs ont données ramenent toujours à une équation mixte du troiſieme degré ſemblable à la propoſée. Au reſte, quand l'extraction de la racine cubique eſt poſſible, la ſomme des deux radicaux qui repréſentent la racine de l'équation, devient toujours rationnelle, de ſorte qu'on peut la trouver immédiatement par la méthode indiquée à l'article 722.

que le second terme manque dans l'équation. Mais nous remarquerons que toute équation complette peut se transformer en une autre où le second terme manque, après quoi l'on peut par conséquent appliquer la regle.

Soit pour le prouver, l'équation complete $x^3-6xx+11x-6=0$. Si l'on prend ici le tiers du coefficient 6 du second terme, & qu'on fasse $x-2=y$, on aura $x=y+2$, $xx=yy+4y+4$, & $x^3=y^3+6yy+12y+8$; par conséquent

$$\begin{array}{rrr} & x^3= & y^3+6yy+12y+8 \\ & -6xx= & -6yy-24y-24 \\ & +11x= & +11y+22 \\ & -\ 6= & -6 \\ \hline x^3-6xx+11x- & 6= & y^3 \quad -\ y. \end{array}$$

On a donc l'équation $y^3-y=0$, dont la résolution est manifeste, puisqu'on voit sur le champ qu'elle est le produit des facteurs $y\,(yy-1)=y\,(y+1)\,(y-1)=0$.

Si l'on fait maintenant chacun de ces facteurs $=0$, on a

I. $\begin{cases} y=0, \\ x=2, \end{cases}$ II. $\begin{cases} y=-1, \\ x=\ \ 1, \end{cases}$ III. $\begin{cases} y=1; \\ x=3, \end{cases}$

c'eſt-à-dire, les trois racines trouvées déjà plus haut.

746.

Soit donnée à préſent l'équation générale du troiſieme degré, $x^3+axx+bx+c=0$, de laquelle il s'agiſſe d'éliminer le ſecond terme.

On ajoutera pour cet effet à x le tiers du coefficient du ſecond terme, en conſervant le même ſigne, & on écrira pour cette ſomme une nouvelle lettre, par exemple, y; de ſorte qu'on aura $x+\frac{1}{3}a=y$, & $x=y-\frac{1}{3}a$, d'où réſulte le calcul ſuivant :

$$x=y-\tfrac{1}{3}a,\ xx=yy-\tfrac{2}{3}ay+\tfrac{1}{9}aa,$$
$$\&\ x^3=y^3-ayy+\tfrac{1}{3}aay-\tfrac{1}{27}a^3;$$

par conſéquent

$$\begin{array}{rl} x^3= & y^3-ayy+\frac{1}{3}aay-\frac{1}{27}a^3 \\ axx= & \quad +ayy-\frac{2}{3}aay+\frac{1}{9}a^3 \\ bx= & \qquad\qquad +by-\frac{1}{3}ab \\ c= & \qquad\qquad\qquad +c \\ \hline \end{array}$$

$$y^3-(\tfrac{1}{3}aa-b)y+\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c=0,$$

équation dans laquelle le ſecond terme manque.

747.

Nous ſommes en état, moyennant cette transformation, de trouver les racines de toutes les équations du troiſieme degré; l'exemple qui ſuit en fournira une preuve.

L'équation propoſée eſt $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$.

Il s'agit d'abord de chaſſer le ſecond terme; on fera pour cet effet $x - 2 = y$, & on aura $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, & $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$; donc

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & \quad - 6yy - 24y - 24 \\ +13x = & \qquad\qquad + 13y + 26 \\ -12 = & \qquad\qquad\qquad - 12 \\ \hline & y^3 + y - 2 = 0 \end{array}$$

ou $y^3 = -y + 2$.

Si on compare cette équation avec la formule $x^3 = fx + g$, on a $f = -1$, $g = 2$;

donc $gg=4$, & $\frac{4}{27}f^3=-\frac{4}{27}$; de plus $gg-\frac{4}{27}f^3=4+\frac{4}{27}=\frac{112}{27}$, & $\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}=\sqrt{\frac{112}{27}}=\frac{4\sqrt{21}}{9}$; par conséquent

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{2+\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{2-\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)},\ \text{ou}$$

$$y=\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{21}}{9}}=\sqrt[3]{\frac{9+2\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{21}}{9}}=\sqrt[3]{\frac{27+6\sqrt{21}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{27-6\sqrt{21}}{27}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{27+6\sqrt{21}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$$

; & il reste à ſubſtituer cette valeur dans $x=y+2$.

748.

Nous ſommes parvenus dans la ſolution de cet exemple, à une quantité doublement irrationnelle; mais il ne faut pas en conclure ſur le champ que la racine eſt irrationnelle, parce qu'il pourroit arriver par un heureux haſard, que les binomes $27\pm6\sqrt{21}$ fuſſent des cubes effectifs; & c'eſt auſſi ce qui a lieu ici; car le cube

de $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ étant $\frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$, il suit que la racine cubique de $27 + 6\sqrt{21}$ est $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, & que la racine cubique de $27 - 6\sqrt{21}$ est $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ Cela fait donc que la valeur trouvée pour y, devient $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Or puisque $y = 1$, nous avons $x = 3$ pour une des racines de l'équation proposée, & les deux autres se trouveront en divisant l'équation par $x - 3$.

$$
\begin{array}{l}
x-3)\, x^3 - 6xx + 13x - 12\ (xx - 3x + 4 \\
\quad x^3 - 3xx \\
\hline
\quad -3xx + 13x - 12 \\
\quad -3xx + 9x \\
\hline
\quad\quad 4x - 12 \\
\quad\quad 4x - 12 \\
\hline
\quad\quad 0.
\end{array}
$$

Et en égalant à o le quotient $xx - 3x + 4$; l'on a $xx = 3x - 4$, & $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Ce font les deux racines en queftion, mais elles font imaginaires.

749.

C'eft par hafard, comme nous l'avons remarqué, qu'on a pu, dans l'exemple précédent, extraire la racine cubique des binomes trouvés, & ce cas n'a lieu que lorfque l'équation a une racine rationnelle, & que par conféquent on emploie avec plus de facilité, pour trouver cette racine, les regles du Chapitre précédent. Mais quand aucune racine rationnelle n'a lieu, il n'eft pas poffible au contraire d'exprimer autrement la racine qu'on trouve, qu'en fuivant la regle de *Cardan*; de forte qu'il eft impoffible alors d'appliquer des réductions. Par exemple, dans l'équation $x^3 = 6x + 4$, on a $f = 6$ & $g = 4$; de forte

que $x = \sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-2\sqrt{-1}}$, ce qui ne peut s'exprimer d'une maniere différente (*).

(*) On a dans cet exemple $\frac{4}{27} f^3$ plus petit que gg ce qui eſt le cas très-connu ſous le nom du *cas irréductible du troiſieme degré*, & qui eſt d'autant plus remarquable, qu'alors toutes les trois racines ſont toujours réelles. On ne peut dans ce cas faire uſage de la formule de *Cardan*, qu'en y appliquant des méthodes d'approximation, par exemple, en la transformant en une ſérie infinie. M. *Lambert* a donné dans l'ouvrage cité à l'article 40, des tables particulieres qui ſervent à trouver facilement les valeurs numériques des racines des équations du troiſieme degré, tant dans le cas irréductible que dans les autres cas. On peut auſſi employer pour cet uſage les tables ordinaires des ſinus. Voyez l'*Aſtronomie ſphérique* de M. *Mauduit*, imprimée à Paris en 1765.

Au reſte, il ne faut pas chercher dans cet Ouvrage de M. *Euler*, tout ce qu'il y avoit à dire ſur les réſolutions, ſoit directes, ſoit approchées, des équations. Il avoit à traiter encore trop d'objets curieux & importans, pour s'appeſantir ſur ces matieres; mais qu'on conſulte l'*Hiſtoire des Mathématiques*, l'*Algebre* de M. *Clairaut*, le *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, & les derniers volumes des Mémoires des Académies des Sciences de Paris & de Berlin, on y trouvera à peu près tout ce qu'on ſait aujourd'hui ſur la réſolution des équations.

CHAPITRE XIII.

De la résolution des Equations du quatrieme degré.

750.

LORSQUE la plus haute puissance de la quantité x monte au quatrieme degré, on a des *équations du quatrieme degré*, & la formule générale en est

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0.$$

Nous considérerons en premier lieu les équations du quatrieme degré *pures*, dont la formule est simplement $x^4 = f$, & dont on trouve aussi-tôt la racine en prenant de part & d'autre la racine bi-quarrée, puisqu'on obtient $x = \sqrt[4]{f}$.

751.

Comme x^4 est le quarré de xx, on se facilite beaucoup le calcul en commençant par extraire la racine quarrée, car on aura

alors $xx = \sqrt{f}$: & prenant enſuite de nouveau la racine quarrée, on a $x = \sqrt{\sqrt{f}}$; de ſorte que $\sqrt[4]{f}$ n'eſt autre choſe que la racine quarrée de la racine quarrée de f.

Si on avoit, par exemple, l'équation $x^4 = 2401$, on auroit d'abord $xx = 49$, & après cela $x = 7$.

752.

Il eſt vrai que voilà ſeulement une racine, & cependant puiſqu'on trouve toujours trois racines cubiques, il n'eſt pas douteux que quatre racines ne doivent avoir lieu ici; mais remarquons que la méthode indiquée ne laiſſe pas de donner en effet ces quatre racines. Car dans l'exemple ci-deſſus on a non-ſeulement $x = 49$, mais auſſi $x = -49$; or la premiere valeur donne les deux racines $x = 7$ & $x = -7$, & la ſeconde valeur donne $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$, & $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$. Et voilà les quatre racines quarré-quarrées de 2401. Il en ſeroit de même à l'égard d'autres nombres.

753.

Après ces équations pures viennent dans l'ordre celles où le ſecond & le quatrieme terme manquent, & qui ont la forme $x^4 + fxx + g = 0$. Elles ſont réſolubles, ſuivant la regle, pour les équations du ſecond degré; car ſi l'on fait $xx = y$, on a $yy + fy + g = 0$, ou $yy = -fy - g$, d'où l'on tire

$$y = -\tfrac{1}{2}f \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}ff - g} = -\frac{f \pm \sqrt{ff - 4g}}{2};$$

or $xx = y$; ainſi $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{ff - 4g}}{2}}$, où les ſignes doubles $\pm$ indiquent toutes les quatre racines.

754.

Mais ſi l'équation contient tous les termes poſſibles, on peut toujours la regarder comme le produit de quatre facteurs. En effet ſi l'on multiplie entr'eux ces quatre facteurs, $(x-p)(x-q)(x-r)(x-ſ)$, on trouve le produit $x^4 - (p+q+r+ſ)x^3 + (pq + pr + pſ + qr + qſ + rſ)xx - (pqr$
$+$

$+pqs+prs+qrs)x+pqrs$, & cette formule ne peut devenir égale à o, que lorſqu'un de ces quatre facteurs eſt $=0$. Or, cela peut arriver en quatre manieres : I.) quand $x=p$, II.) quand $x=q$, III.) quand $x=r$, IV.) quand $x=s$; & ce ſont-là par conſéquent les quatre racines de l'équation.

755.

Si nous conſidérons cette formule avec quelque attention, nous remarquons, dans le ſecond terme, la ſomme des quatre racines, multipliée par $-x^3$; dans le troiſieme terme, la ſomme de tous les produits poſſibles de deux racines, multipliée par xx; dans le quatrieme terme, la ſomme des produits des racines multipliées trois à trois, multipliée par $-x$; enfin dans le cinquieme terme, le produit de toutes les quatre racines multipliées enſemble.

756.

Comme le dernier terme contient le produit de toutes les racines, il eſt clair

qu'une telle équation du quatrieme degré ne peut avoir une racine rationnelle qui ne ſoit en même temps un diviſeur du dernier terme. Ce principe fournit donc un moyen facile de déterminer toutes les racines rationnelles, lorſqu'il y en a, puiſqu'on n'a qu'à ſubſtituer ſucceſſivement à x tous les diviſeurs du dernier terme, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui ſatisfaſſe à l'équation; car ayant trouvé une telle racine, par exemple, $x=p$, on n'a qu'à diviſer l'équation par $x-p$, après avoir porté tous les termes du même côté, & ſuppoſer enſuite le quotient $=0$; on *obtiendra une* équation du troiſieme degré, qu'on pourra réſoudre par les regles données ci-deſſus.

757.

Or, il eſt abſolument néceſſaire pour cela que tous les termes conſiſtent en des nombres entiers, & que le premier n'ait que l'unité pour coefficient; toutes les fois donc que quelques termes renferment des frac-

tions, il faudra commencer par éliminer ces fractions, & c'est ce qu'on peut toujours faire en substituant au lieu de x la quantité y divisée par un nombre qui renferme tous les dénominateurs de ces fractions.

Par exemple, si l'on a l'équation $x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{3} xx + \frac{3}{4} x + \frac{1}{18} = 0$, comme on y rencontre des fractions qui ont pour dénominateurs 2, 3 & des puissances de ces nombres, on supposera $x = \frac{y}{6}$, & on aura $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0$, équation qui multipliée par 6^4 devient $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$.

Si l'on vouloit chercher maintenant si cette équation a des racines rationnelles, il faudroit écrire à la place de y successivement les diviseurs de 72, afin de voir dans quels cas la formule se réduiroit réellement à 0.

758.

Mais comme les racines peuvent être aussi bien positives que négatives, il faudroit avec chaque diviseur faire deux essais, l'un en supposant ce diviseur positif, l'autre en le regardant comme négatif; cependant une nouvelle remarque en dispense souvent (*). Toutes les fois que les signes + & — se suivent réguliérement, l'équation a autant de racines positives, qu'il y a de changemens dans les signes; & autant de fois que les mêmes signes reviennent sans interruption, autant l'équation a de racines négatives. Or, notre exemple contient quatre changemens de signes & aucune succession; ainsi toutes les racines sont positives, & on n'a pas besoin de prendre aucun des diviseurs du dernier terme en moins.

(*) Cette regle est générale pour les équations de tous les degrés, pourvu qu'il n'y ait point de racines imaginaires; les François l'attribuent à *Descartes*, les Anglois à *Harriot;* mais M. l'abbé *de Gua* est le premier qui en ait donné une démonstration générale. Voyez les *Mém. de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1741.

759.

Soit donnée l'équation $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$.

Nous voyons ici deux changemens de ſignes, mais auſſi deux ſucceſſions; d'où nous concluons avec certitude, que cette équation contient deux racines poſitives & autant de racines négatives, qui doivent toutes être des diviſeurs du nombre 12. Or ces diviſeurs ſont 1, 2, 3, 4, 6, 12; qu'on eſſaye donc d'abord $x = +1$, on parviendra réellement à 0; donc une des racines eſt $x = 1$.

Si l'on fait enſuite $x = -1$, on trouve $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$; ainſi $x = -1$ n'eſt pas une des racines. Qu'on faſſe après cela $x = 2$, on trouve de nouveau la formule $= 0$, & par conſéquent, pour une des racines, $x = 2$; mais $y = -2$ au contraire ne ſe trouve pas être une racine. Lorſqu'on fait enſuite $x = 3$, on a $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$, c'eſt-à-dire

que cette supposition ne satisfait pas; au lieu que $x = -3$, donnant $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$, est évidemment une des racines qu'on cherche. Enfin, quand on aura essayé $x = -4$, on verra pareillement l'équation se réduire à zéro; de sorte donc que toutes les quatre racines sont rationnelles, & ont les valeurs suivantes: I.) $x = 1$, II.) $x = 2$, III.) $x = -3$, IV.) $x = -4$; & conformément à la regle donnée ci-dessus, deux de ces racines sont positives, & les deux autres sont négatives.

760.

Mais aucune racine ne pouvant être déterminée par cette voie, lorsque les racines sont toutes irrationnelles, il a fallu songer à des expédiens pour exprimer les racines dans ce cas. On y a réussi au point qu'on a découvert deux routes différentes pour parvenir à la connoissance de semblables racines, quelle que soit la nature de l'équation du quatrieme degré.

Il ſera bon, avant que d'expliquer ces méthodes générales, que nous donnions les ſolutions de quelques cas particuliers, leſquelles peuvent ſouvent s'appliquer très-utilement.

761.

Lorſque l'équation eſt de nature, que les coefficiens des termes ſe ſuivent de la même maniere, tant dans l'ordre direct des termes, que dans l'ordre rétrograde, comme il arrive dans l'équation ſuivante (*):

$$x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0,$$

ou dans cette autre équation qui eſt plus générale.

(*) On peut nommer ces équations *réciproques*, parce qu'elles ne changent point en y mettant $\frac{1}{x}$ à la place de x. Il ſuit de cette propriété que ſi a, par exemple, eſt une des racines, $\frac{1}{a}$ en ſera une auſſi; c'eſt la raiſon pourquoi ces ſortes d'équations peuvent ſe réduire à d'autres équations, dont le degré eſt plus petit de la moitié. M. de *Moivre* donne dans ſes *Miſcellanea analytica*, p. 71, des formules générales pour la réduction de ces ſortes d'équations, de quelque degré qu'elles ſoient.

$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0.$

On peut toujours regarder une telle formule comme le produit de deux facteurs, qui sont des formules du second degré, & qu'on résout facilement. En effet, qu'on représente cette derniere équation par le produit $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, où il s'agisse de déterminer p & q de maniere qu'on obtienne l'équation susdite, on trouvera, en effectuant la multiplication, $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq+2) aaxx + (p+q)a^3x + a^4 = 0$; & pour que cette équation soit la même que la précédente, il faut 1°. que $p+q=m$, 2°. que $pq+2=n$, & par conséquent que $pq=n-2$.

Maintenant, quarrant la premiere de ces égalités, on a $pp+2pq+qq=mm$; si on soustrait de ceci la seconde prise quatre fois, ou $4pq=4n-8$, il reste $pp-2pq+qq=mm-4n+8$; & prenant la racine quarrée, on trouve $p-q=\sqrt{mm-4n+8}$. Or $p+q=m$, on aura donc par l'addition,

$2p = m + \sqrt{mm - 4n + 8}$, ou $p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n + 8}}{2}$; & par la souſtraction, $2q = m - \sqrt{mm - 4n + 8}$ ou $q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n + 8}}{2}$. Ayant donc trouvé p & q, on n'a plus qu'à ſuppoſer chaque facteur $= 0$; afin de déterminer les valeurs de x: le premier donne $xx + pax + aa = 0$, ou $xx = - pax - aa$, d'où l'on tire $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\frac{ppaa}{4} - aa}$, ou $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2} a\sqrt{pp - 4}$; le ſecond facteur donne $x = -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2} a\sqrt{qq - 4}$; & ce ſont-là les quatre racines de l'équation propoſée.

762.

Pour rendre cet article plus clair, ſoit donnée l'équation $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$. Nous avons ici $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$; par conſéquent $mm - 4n + 8 = 36$, & la racine quarrée de cette quantité $= 6$; donc $p = -\frac{4+6}{2} = 1$, & $q = -\frac{4-6}{2} = -5$; de là réſultent les quatre racines I.) & II.) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; & III.)

& IV.) $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, c'est-à-d. que les quatre racines de l'équation proposée sont :

I.) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, III.) $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$,

II.) $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, IV.) $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Les deux premieres de ces racines sont imaginaires ou impossibles ; mais les deux dernieres sont possibles ; puisqu'on peut indiquer $\sqrt{21}$ aussi exactement qu'on le souhaite, en exprimant cette racine par des fractions décimales. En effet, 21 étant autant que 21,00000000, on n'a qu'à tirer la racine quarrée, comme il suit :

```
21|00|00|00|00|00|4,5825
16
 85|500
   |425
 908|7500
    |7264
 9162|23600
     |18324
 91645|527600
      |458225
        69375.
```

Puis donc que $\sqrt{21}=4,5825$, la troisieme racine approche d'assez près $x=4,7912$, & la quatrieme, $x=0,2087$; & il eût été facile de déterminer ces racines avec encore plus de précision.

Remarquons que la quatrieme racine étant à très-peu près $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$, cette valeur satisfera déjà assez exactement à l'équation; en effet, si l'on fait $x=\frac{1}{5}$, on trouve $\frac{1}{625}-\frac{4}{125}-\frac{3}{25}-\frac{4}{5}+1=\frac{31}{625}$; on auroit dû trouver o, mais la différence, comme on voit, n'est pas grande.

763.

Le second cas où une résolution semblable a lieu, est le même que le premier quant aux coefficiens, mais il en differe dans les signes; car nous supposerons que le second & le quatrieme termes aient des signes différens; une telle équation est donc, par exemple :

$$x^4+max^3+naaxx-ma^3x^3+a^4=0,$$

qui peut être représentée par le produit; $(xx+pax-aa)(xx+qax=aa)=0$. Car la multiplication réelle de ces facteurs donne

$$x^4+(p+q)ax^3+(pq-2)aaxx-(p+q)a^3x+a^4,$$

quantité qui est égale à la formule proposée, si on suppose en premier lieu $p+q=m$, & en second lieu $pq-2=n$, ou $pq=n+2$; parce que de cette façon les quatriemes termes deviennent égaux d'eux-mêmes. Qu'on quarre, comme ci-dessus, la premiere équation, on aura $pp+2pq+qq=mm$; qu'on soustraye de celle-ci la seconde prise quatre fois, ou $4pq=4n+8$, il restera $pp-2pq+qq=mm-4n-8$; la racine quarrée est $p-q=\sqrt{mm-4n-8}$, & de là on obtient $p=\frac{m+\sqrt{mm-4n-8}}{2}$ & $q=\frac{m-\sqrt{mm-4n-8}}{2}$. Ayant donc trouvé p & q, on connoîtra par le premier facteur les deux racines $x=-\frac{1}{2}pa\pm\frac{1}{2}\sqrt{pp+4}$, & par le second facteur

les deux racines $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{qq+4}$, c'est-à-dire qu'on aura les quatre racines de l'équation proposée.

764.

Soit donnée l'équation $x^4 - 3 \cdot 2x^3 + 3 \cdot 8x + 16 = 0$, nous avons $a = 2$ & $m = -3$, & $n = 0$; ainsi $\sqrt{mm - 4n - 8} = 1$, & par conséquent

$p = \frac{-3+1}{2} = -1$, & $q = \frac{-3-1}{2} = -2$.

Donc les deux premieres racines sont $x = 1 \pm \sqrt{5}$, & les deux dernieres sont $x = 2 \pm \sqrt{8}$; moyennant quoi les quatre racines cherchées seront : I.) $x = 1 + \sqrt{5}$; II.) $x = 1 - \sqrt{5}$, III.) $x = 2 + \sqrt{8}$, IV.) $x = 2 - \sqrt{8}$. Par conséquent les quatre facteurs de notre équation seront $(x - 1 - \sqrt{5})$ $(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$, & leur multiplication effective produit réellement cette équation; car les deux premiers étant multipliés entr'eux, donnent $xx - 2x - 4$, & les deux autres donnent

$xx - 4x - 4$; or ces deux produits multipliés pareillement l'un par l'autre, font $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, ce qui est précisément l'équation proposée.

CHAPITRE XIV.

De la Regle de BOMBELLI, *pour réduire la résolution des Equations du quatrieme degré à celle des Equations du troisieme degré.*

765.

NOUS avons fait voir plus haut, comment on résout, par la regle de *Cardan*, les équations du troisieme degré; ainsi tout consiste principalement, pour les équations du quatrieme, à en réduire la résolution à celle des équations du troisieme degré. C'est qu'il n'est pas possible de résoudre généralement les équations du quatrieme degré sans le secours de celles du

troisieme, vu qu'ayant même déterminé une des racines, les autres ne laissent pas de dépendre d'une équation du troisieme degré. Et on peut conclure de là qu'aussi les équations de dimensions plus hautes, présupposent la résolution de toutes les équations de degrés inférieurs.

766.

Or il y a déjà quelques siecles qu'un Italien, nommé *Bombelli*, a donné une regle pour cela, que nous nous proposons d'expliquer dans ce Chapitre (*).

Soit donnée l'équation générale du quatrieme degré, $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, où les lettres, a, b, c, d, signifient tous les nombres imaginables. Qu'on suppose maintenant que cette équation soit la même que celle-ci, $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, où il s'agisse de déter-

(*) Cette méthode appartient plutôt à *Louis Ferrari*. On la nomme improprement la *regle de Bombelli*, ainsi qu'on attribue à *Cardan* la méthode imaginée par *Scipion Ferreo*.

miner les lettres p, q & r, de maniere qu'on obtienne l'équation proposée. Si on range la nouvelle équation, on aura

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + \frac{1}{4}aaxx + apx + pp \\ \qquad\quad + 2pxx - 2qrx - rr \\ \qquad\quad - qqxx \end{array}$$

Or les deux premiers termes sont ici déjà les mêmes que dans l'équation donnée ; le troisieme terme exige qu'on fasse $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, ce qui donne $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$; le quatrieme terme indique qu'on doit faire $ap - 2qr = c$, ou $2qr = ap - c$; enfin on a pour le dernier terme $pp - rr = d$, ou $rr = pp - d$. Voilà donc trois équations qui doivent donner les valeurs de p, q & r.

767.

La maniere la plus facile d'en tirer ces valeurs est la suivante : qu'on prenne la premiere équation quatre fois, on aura $4qq = aa + 8p - 4b$; cette équation multipliée par la derniere, $rr = pp - d$, donne

$4qqrr$

$$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b).$$

Si de plus on quarre la feconde équation, on aura $4qqrr = aapp - 2acp + cc$. Ainfi nous avons pour $4qqrr$ deux valeurs qu'on peut égaler entr'elles, ce qui fournit l'équation $8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$, ou, en portant tous les termes d'un même côté, $8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$, équation du troifieme degré, qui donnera toujours la valeur de p par les regles expofées plus haut.

768.

Ayant donc déterminé les trois valeurs de p par les données a, b, c, d, ce qui ne demande que d'avoir trouvé une feule de ces valeurs, on aura auffi les valeurs des deux autres lettres q & r; car la premiere équation donnera $q = \sqrt{\frac{1}{4}aa + 2p - b}$, & la feconde donne $r = \frac{ap - c}{2q}$. Or ces trois valeurs étant déterminées pour chaque cas

donné, voici comment on pourra trouver enfin les quatre racines de l'équation proposée :

Cette équation ayant été réduite à la forme $(xx + \frac{1}{2}axp)^2 - (qx + r)^2 = 0$, on aura $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$; & en tirant la racine, $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, ou bien $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$. La premiere équation donne $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$, d'où l'on peut avoir deux racines; & la seconde équation, à laquelle on peut donner la forme $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$, fournira les deux autres racines.

769.

Eclairciſſons cette regle par un exemple, & ſuppoſons donnée l'équation $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$. Si nous la comparons avec notre formule générale, nous avons $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$, & par conſéquent l'équation qui doit donner la valeur de p eſt $8p^3 - 140pp + 808p$

$-1540=0$, ou $2p^3-35pp+202p-385=0$. Les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 5, 7, 11, &c. Le premier 1 ne ſatisfait pas; mais en faiſant $p=5$, on trouve $250-875+1010-385=0$, en ſorte que $p=5$. Si on ſuppoſe de plus $p=7$, on trouve $686-1715+1414-385=0$, marque que $p=7$ eſt la ſeconde racine. Il reſte à trouver la troiſieme racine : qu'on diviſe donc l'équation par 2, pour avoir $p^3-\frac{35}{2}pp+101p-\frac{385}{2}=0$, & qu'on conſidere que le coefficient du ſecond terme, ou $\frac{35}{2}$, étant la ſomme de toutes les trois racines, & les deux premieres faiſant enſemble 12, la troiſieme doit néceſſairement être $\frac{11}{2}$.

Nous connoiſſons par conſéquent les trois racines en queſtion. Mais remarquons qu'une ſeule eût ſuffi, parce que chacune donne également les quatre racines de notre équation du quatrieme degré.

770.

Pour le prouver, soit d'abord $p=5$; nous aurons $q=\sqrt{25+10-35}=0$, & $r=-\frac{50+50}{0}=\frac{0}{0}$. Or rien n'étant déterminé par-là, prenons la troisieme équation $rr=pp-d=25-24=1$, de sorte que $r=1$; nos deux équations du second degré seront:

I.) $xx=5x-4$, II.) $xx=5x-6$.

La premiere donne les deux racines $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$, ou $x=\frac{5\pm3}{2}$, c'est-à-dire $x=4$ & $x=1$.

La seconde équation donne $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5\pm1}{2}$, c'est-à-dire, $x=3$ & $x=2$.

Mais supposons maintenant $p=7$, nous aurons $q=\sqrt{25+14-35}=2$ & $r=-\frac{70+50}{4}=-5$, d'où résultent les deux équations du second degré, I.) $xx=7x-12$, II.) $xx=3x-2$; la premiere donne $x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, ou $x=\frac{7\pm1}{2}$, ainsi $x=4$ & $x=3$; la seconde fournit la racine $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3\pm1}{2}$, & par conséquent $x=2$, &

$x = 1$; de forte que par cette feconde fuppofition on trouve les mêmes quatre racines que par la premiere.

Enfin les mêmes racines fe trouvent, par la troifieme valeur de $p, = \frac{11}{2}$. Car on a dans ce cas $q = \sqrt{25 + 11 - 35} = 1$, & $r = -\frac{55+50}{2} = -\frac{5}{2}$; & par-là les deux équations du fecond degré,

I.) $xx = 6x - 8$, II.) $xx = 4x - 3$.

On tire de la premiere, $x = 3 \pm \sqrt{1}$, c'eft-à-dire, $x = 4$ & $x = 2$; & de la feconde, $x = 2 \pm \sqrt{1}$, c'eft-à-dire, $x = 3$ & $x = 1$, ce qui forme encore les quatre racines trouvées ci-devant.

771.

Soit propofée cette autre équation, $x^4 - 16x - 12 = 0$, dans laquelle $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$. Notre équation du troifieme degré fera, $8p^3 + 96p - 256 = 0$, ou $p^3 + 12p - 32 = 0$, & on peut rendre cette équation encore plus fimple, en faifant $p = 2t$; car on a alors $8t^3$

$+ 24t - 32 = 0$, ou $t^3 + 3t - 4 = 0$. Les diviseurs du dernier terme sont $1, 2, 4$. Une des racines se trouve être $t = 1$; donc $p = 2$, $q = \sqrt{4} = 2$, & $r = \frac{16}{4} = 4$. Par conséquent les deux équations du second degré sont $xx = 2x + 2$, & $xx = -2x - 6$, & elles fournissent les racines $x = 1 \pm \sqrt{3}$ & $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

772.

Nous tâcherons de rendre encore plus familiere la résolution dont nous parlons, en la répétant toute entiere dans l'exemple suivant :

On a l'équation $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, qui doit être contenue dans la formule $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, dans la premiere partie de laquelle on a mis $-3x$, parce que -3 est la moitié du coefficient -6 du second terme de l'équation proposée. Cette formule étant développée, donne $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)\,xx - (6p + 2qr)\,x + pp - rr = 0$, à

comparer avec notre équation, & il en résulte les égalités suivantes :

I.) $2p+9-qq=12$, II.) $6p+2qr=12$, III.) $pp-rr=4$. La premiere donne, $qq=2p-3$; la seconde, $2qr=12-6p$, ou $qr=6-3p$; la troisieme, $rr=pp-4$. Multipliant rr par qq, on a $qqrr=2p^3-3pp-8p+12$; & d'un autre côté, si on quarre la valeur de qr, on a $qqrr=36-36p+9pp$; ainsi nous avons l'équation $2p^3-3pp-8p+12=9pp-36p+36$, ou $2p^3-12pp+28p-24=0$, ou $p^3-6pp+14p-12=0$, dont une des racines est $p=2$; & il s'ensuit que $qq=1$, $q=1$ & $qr=r=0$. Donc notre équation sera $(xx-3x+2)^2=xx$, & la racine quarrée en sera $xx-3x+2=\pm x$. Si on adopte le signe supérieur, on a $xx=4x-2$; & en admettant le signe inférieur, on obtient $xx=2x-2$, d'où se tirent les quatre racines $x=2\pm\sqrt{2}$, & $x=1\pm\sqrt{-1}$.

CHAPITRE XV.

D'une nouvelle méthode de résoudre les Equations du quatrieme degré.

773.

Nous avons vu comment, par la regle de *Bombelli*, on résout les équations du quatrieme degré par le moyen d'une équation du troisieme degré; mais on a trouvé, depuis l'invention de cette regle, une autre voie pour parvenir à cette résolution; & comme cette méthode est tout-à-fait différente de la premiere, elle mérite d'être expliquée séparément (*).

774.

On suppose que la racine d'une équation du quatrieme degré a la forme $x = \sqrt{p}$

(*) La méthode dont il va être question, appartient à M. *Euler* lui-même. Il l'a exposée dans le sixieme volume des anciens Commentaires de Pétersbourg.

$+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, où les lettres p, q, r signifient les racines d'une équation du troisieme degré, $z^3-fzz+gz-h=0$; en sorte que $p+q+r=f$, $pq+pr+qr=g$, & $pqr=h$. Cela posé, on quarre la formule adoptée, $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, & on a $xx=p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$; & puisque $p+q+r=f$, on a $xx-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$; on prend de nouveau les quarrés, & on trouve $x^4-2fxx+ff=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{ppqr}+8\sqrt{pqqr}+8\sqrt{pqrr}$. Or $4pq+4pr+4qr=4g$, ainsi l'équation devient $x^4-2fxx+ff-4g=8\sqrt{pqr}.(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$; mais $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$, & $pqr=h$, ou $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$; donc on parvient à l'équation du quatrieme degré $x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0$, dont une des racines est sûrement $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, & où p, q & r sont les racines de l'équation du troisieme degré, $z^3-fzz+gz-h=0$.

775.

L'équation du quatrieme degré, à laquelle nous sommes parvenus, peut être regardée comme générale, quoique le second terme x^3 y manque; car nous ferons voir plus bas qu'une équation complete quelconque peut être transformée en une autre où le second terme soit ôté.

Soit donc proposée l'équation $x^4 - axx - bx - c = 0$, pour en déterminer une racine. Nous la comparerons avec la formule trouvée, afin de parvenir aux valeurs de f, g & h; il faut 1°. que $2f = a$, & $f = \frac{a}{2}$; 2°. que $8\sqrt{h} = b$, ainsi $h = \frac{bb}{64}$; 3°. que $ff - 4g = -c$, ou $\frac{aa}{4} - 4g + c = 0$, ou $\frac{1}{4}aa + c = 4g$; par conséquent que $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

776.

Puis donc que l'équation $x^4 - axx - bx - c = 0$, donne les valeurs des lettres f, g & h, de maniere que $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa$

$+\frac{1}{4}c$, & $h=\frac{1}{64}bb$, ou $\sqrt{h}=\frac{1}{8}b$, on formera de ces valeurs l'équation du troisieme degré $z^3-fzz+gz-h=0$, pour en chercher les trois racines par la regle connue. Et si l'on suppose ces racines, I.) $z=p$, II.) $z=q$, III.) $z=r$, il faut qu'une des racines de notre équation du quatrieme degré soit $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

777.

Il semble d'abord que cette méthode ne fournit qu'une seule des racines de l'équation proposée; mais si on réfléchit que chaque signe $\sqrt{}$ peut être pris, tant négativement que positivement, on sentira sur le champ que cette formule contient même toutes les quatre racines.

Il y a plus : si on vouloit admettre tous les changemens possibles des signes, on auroit huit valeurs différentes pour x, & cependant quatre seulement peuvent avoir lieu. Mais remarquons que le produit de ces trois termes, qui est $\sqrt{pqr}$, doit être

égal à $\sqrt{h} = \frac{1}{8} b$, & que si $\frac{1}{8} b$ est positif, le produit des termes $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ & $\sqrt{r}$, doit pareillement être positif, de sorte que les variations admissibles se réduisent aux quatre qui suivent :

$$\begin{aligned} \text{I.)}\ x &= \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}, \\ \text{II.)}\ x &= \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}, \\ \text{III.)}\ x &= -\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}, \\ \text{IV.)}\ x &= -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}. \end{aligned}$$

De même, quand $\frac{1}{8} b$ est négatif, on a simplement les quatre valeurs de x que voici :

$$\begin{aligned} \text{I.)}\ x &= \sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}, \\ \text{II.)}\ x &= \sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}, \\ \text{III.)}\ x &= -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}, \\ \text{IV.)}\ x &= -\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}. \end{aligned}$$

Cette remarque nous met en état de déterminer les quatre racines dans tous les cas ; l'exemple suivant le fera voir.

778.

Soit proposée l'équation du quatrieme degré $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$, dans laquelle le second terme manque. Si nous la comparons avec la formule générale, nous avons $a = 25$, $b = -60$ & $c = 36$, & après cela $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$, & $h = \frac{225}{4}$; moyennant quoi notre équation du troisieme degré devient :

$$z^3 - \frac{25}{2}zz + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0.$$

Pour chasser d'abord les fractions, faisons $z = \frac{u}{4}$; nous aurons $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{u^2}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, & en multipliant par le plus grand dénominateur, $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$. Il faut déterminer les trois racines de cette équation; elles se trouvent toutes trois positives; l'une d'elles est $u = 9$, & en divisant l'équation par $u - 9$, on trouve la nouvelle équation $uu - 41u + 400 = 0$, ou $uu = 41u - 400$, qui donne $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}} = \frac{41 \pm 9}{2}$; de sorte que les

trois racines font $u=9$, $u=16$, & $u=25$.
Par conféquent

I.) $z=\frac{9}{4}$, II.) $z=4$, III.) $z=\frac{25}{4}$.

Et voilà donc les valeurs des lettres p, q & r, c'eft-à-dire que $p=\frac{9}{4}$, $q=4$, $r=\frac{25}{4}$. Maintenant, fi nous faifons attention que $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}=-\frac{15}{2}$, & qu'ainfi cette valeur $=\frac{1}{8}b$ eft négative, il nous faudra, pour nous conformer à ce qui a été dit à l'égard des fignes des racines $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ & $\sqrt{r}$, prendre tous ces trois radicaux en *moins*, ou n'en prendre qu'un feul en *moins*; & par conféquent, comme $\sqrt{p}=\frac{3}{2}$, $\sqrt{q}=2$ & $\sqrt{r}=\frac{5}{2}$, les quatre racines de l'équation propofée fe trouvent être :

$$\text{I.)}\ x=\ \ \frac{3}{2}+2-\frac{5}{2}=\ \ 1,$$
$$\text{II.)}\ x=\ \ \frac{3}{2}-2+\frac{5}{2}=\ \ 2,$$
$$\text{III.)}\ x=-\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=\ \ 3,$$
$$\text{IV.)}\ x=-\frac{3}{2}-2-\frac{5}{2}=-6.$$

De ces racines réfultent les quatre facteurs,

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0.$$

Les deux premiers multipliés ensemble, donnent $xx - 3x + 2$; le produit des deux derniers est $xx + 3x - 18$, & en multipliant ces deux produits l'un par l'autre, on trouve exactement l'équation proposée.

779.

Il nous reste à faire voir comment une équation du quatrieme degré, dans laquelle le second terme se trouve, peut être transformée en une autre où ce terme manque. Nous donnerons pour cet effet la regle suivante.

Soit proposée l'équation générale $y^4 + ay^3 + byy + cy + d = 0$. Qu'on ajoute à y la quatrieme partie du coefficient du second terme, ou bien $\frac{1}{4}a$, & qu'on écrive à la place de la somme une nouvelle lettre x, de façon que $y + \frac{1}{4}a = x$, & par conséquent $y = x - \frac{1}{4}a$; on aura $yy = xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$, $y^3 = x^3 - \frac{3}{4}axx + \frac{3}{6}aax - \frac{1}{64}a^3$, & enfin ce qui suit :

$$\begin{array}{llllll}
y^4 = & x^4 - ax^3 & + \frac{3}{8}aaxx & - \frac{1}{16}a^3x & + \frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3 = & +ax^3 & - \frac{3}{4}aaxx & + \frac{3}{16}a^3x & - \frac{1}{64}a^4 \\
+byy = & & +bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
+cy = & & & +cx & - \frac{1}{4}ac \\
+d = & & & & +d \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{llll}
x^4 + 0 - \frac{3}{8}aaxx & + \frac{1}{8}a^3x & - \frac{3}{256}a^4 \\
+bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
& +cx & - \frac{1}{4}ac \\
& & +d
\end{array}\right\} = 0.$$

On a donc à préfent une équation, dans laquelle le fecond terme eft ôté, & à laquelle rien n'empêche d'appliquer la regle donnée, pour en déterminer les quatre racines. Après quoi ces valeurs de x *étant* trouvées, on déterminera facilement celles de y, puifque $y = x - \frac{1}{4}a$.

780.

Voilà où on eft parvenu jufqu'à préfent dans la réfolution des équations algébriques; c'eft inutilement qu'on s'eft donné beaucoup de peines pour réfoudre de la même maniere les équations du cinquieme degré & de

de dimenſions plus élevées, ou pour les réduire du moins à des degrés inférieurs; de ſorte qu'on n'eſt pas en état de donner des regles générales pour trouver les racines des équations qui paſſent le quatrieme degré.

Tout ce qu'on a eu de ſuccès ne s'étend qu'à des cas très-particuliers; le principal de ces cas eſt celui où une racine rationnelle a lieu; car on la trouve facilement par la méthode des diviſeurs, parce qu'on ſait qu'une telle racine doit toujours être facteur du dernier terme; le procédé, au reſte, eſt le même que celui que nous avons enſeigné pour les équations du troiſieme & du quatrieme degré.

781.

Il ſera cependant néceſſaire d'appliquer encore la regle de *Bombelli* auſſi à une équation qui n'ait point de racines rationnelles.

Soit donnée l'équation $y^4 - 8y^3 + 14yy$

$+4y-8=0$. Il faudra commencer par retrancher le ſecond terme, en ajoutant le quart de ſon coefficient à y, en ſuppoſant $y-2=x$, & en ſubſtituant dans l'équation, au lieu de y ſa nouvelle valeur $x+2$, au lieu de yy la valeur $xx+4x+4$, & au lieu de y^3 la valeur $x^3+6xx+12x+8$. Et faiſant de même à l'égard de y^4, on aura :

$$\begin{array}{rcrrrrr} y^4 & = & x^4 & +8x^3 & +24xx & +32x & +16 \\ -8y^3 & = & & -8x^3 & -48xx & -96x & -64 \\ +14yy & = & & & +14xx & +56x & +56 \\ +4y & = & & & & +4x & +8 \\ -8 & = & & & & & -8 \\ \hline & & x^4 & +0 & -10xx & -4x & +8=0. \end{array}$$

Cette équation étant comparée avec notre formule générale, donne $a=10$, $b=4$, $c=-8$; d'où nous concluons que $f=5$, $g=\frac{17}{4}$, $h=\frac{1}{4}$ & $\sqrt{h}=\frac{1}{2}$; que le produit $\sqrt{pqr}$ ſera poſitif ; & que c'eſt de l'équation du troiſieme degré $z^3-5zz+\frac{17}{4}z-\frac{1}{4}=0$, qu'il faut chercher les trois racines p, q, r.

782.

Retranchons d'abord les fractions de cette équation. Si nous faisons $z = \frac{u}{2}$, nous avons, après avoir multiplié par 8, l'équation $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, où toutes les racines sont positives. Or les diviseurs du dernier terme sont 1 & 2; si nous essayons par $u = 1$, nous trouvons $1 - 10 + 17 - 2 = 6$; ainsi l'équation ne se réduit pas à zéro; mais en essayant par $u = 2$, nous trouvons $8 - 40 + 34 - 2 = 0$, ce qui satisfait à l'équation, & donne à connoître que $u = 2$ est une des racines. Les deux autres se trouveront en divisant par $u - 2$, comme de coutume; le quotient $uu - 8u + 1 = 0$ donne $uu = 8u - 1$, & $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Et puisque $z = \frac{1}{2}u$, les trois racines de l'équation du troisieme degré sont, I.) $z = p = 1$, II.) $z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}$ III.) $z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}$.

783.

Ayant donc déterminé p, q, r, nous avons aussi leurs racines quarrées, savoir: $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{2}$, & $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{2}$.

Mais nous avons vu plus haut, (675, 676), que la racine quarrée de $a\pm\sqrt{b}$, quand $\sqrt{aa-b}=c$, s'exprime par $\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; ainsi, comme dans notre cas $a=8$ & $\sqrt{b}=2\sqrt{15}$, & que par conséquent $b=60$ & $c=2$, nous avons $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, & $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Or, nous avons maintenant $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, & $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; donc, puisque nous savons aussi que le produit de ces quantités est positif, les quatre valeurs de x seront celles-ci :

I.) $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} =1+\sqrt{5}$,

II.) $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}=1-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} =1-\sqrt{5}$,

III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
$= -1 + \sqrt{3}$,

IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
$= -1 - \sqrt{3}$.

Enfin, comme nous avions $y = x + 2$, les quatre racines de l'équation propoſée ſont :

I.) $y = 3 + \sqrt{5}$, III.) $y = 1 + \sqrt{3}$,
II.) $y = 3 - \sqrt{5}$, IV.) $y = 1 - \sqrt{3}$.

CHAPITRE XVI.

De la réſolution des Equations par des approximations.

784.

LORSQUE les racines d'une équation ne ſont pas rationnelles, ſoit qu'on puiſſe les exprimer par des quantités radicales, ſoit qu'on n'ait pas même cette reſſource, comme c'eſt le cas pour les équations qui paſſent le quatrieme degré, on eſt obligé de

ſe contenter de déterminer leurs valeurs par des approximations, c'eſt-à-dire par des voies qui ſont qu'on approche toujours davantage de la vraie valeur, juſqu'à ce que l'erreur puiſſe être cenſée nulle. On a propoſé différentes méthodes de cette eſpece, nous allons détailler les principales.

785.

Le premier moyen dont nous parlerons, ſuppoſe qu'on ait déjà déterminé aſſez exactement la valeur d'une racine (*); qu'on ſache, par exemple, qu'une telle valeur ſurpaſſe 4, & qu'elle eſt plus petite que 5. Dans ce cas, ſi l'on ſuppoſe cette valeur $= 4 + p$, on eſt sûr que p exprime une fraction. Or ſi p eſt une fraction, & par conſéquent moindre que l'unité, le quarré

(*) Cette méthode eſt celle que *Newton* a donnée au commencement de ſa *méthode des fluxions*. En l'approfondiſſant on la trouve ſujette à différentes imperfections; c'eſt pourquoi on y ſubſtituera avec avantage la méthode que M. *de la Grange* a donnée dans les Mémoires de Berlin, pour les années 1767 et 1768.

de p, son cube, & en général toutes les puissances plus hautes de p, seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction p, on connoîtra déjà plus exactement la racine $4+p$; on partira de là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, & on continuera de la même maniere, jusqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le souhaitoit.

786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx = 20$.

On voit ici que x est plus grand que 4 & plus petit que 5; en conséquence de cela on fera $x = 4 + p$, & on aura $xx = 16 + 8p + pp = 20$; mais comme pp est très-

petit, on négligera ce terme pour avoir seulement l'équation $16+8p=20$, ou $8p=4$; elle donne $p=\frac{1}{2}$ & $x=4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on suppose à présent $x=4\frac{1}{2}+p$; on est sûr que p signifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raison. On aura donc $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, ou $9p=-\frac{1}{4}$, & par conséquent $p=-\frac{1}{36}$; donc $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$.

Que si l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x=4\frac{17}{36}+p$, & on auroit $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20$; ainsi $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$, $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$, & $p=-\frac{1}{36.322}=-\frac{1}{11592}$. Donc $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche si fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

787.

Généralisons ce que nous venons d'exposer, en supposant que l'équation donnée soit $xx = a$, & qu'on sache d'avance que x est plus grand que n, mais plus petit que $n+1$. Si après cela nous supposons $x = n + p$, en sorte que p doive être une fraction, & que pp puisse se négliger comme une quantité très-petite, nous aurons $xx = nn + 2np = a$; ainsi $2np = a - nn$, & $p = \frac{a-nn}{2n}$; par conséquent $x = n + \frac{a-nn}{2n} = \frac{nn+a}{2n}$. Or si n approchoit déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur $\frac{nn+a}{2n}$ en approchera encore beaucoup plus. Ainsi en la substituant à n, on se trouvera encore plus près de la vérité; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra substituer de nouveau, afin d'approcher encore davantage; & on pourra continuer le même procédé aussi loin qu'on voudra.

Soit, par exemple, $a = 2$, c'est-à-dire qu'on demande la racine quarrée de 2; si

on connoît déjà une valeur assez approchante, & qu'on l'exprime par n, on aura une valeur de la racine encore plus approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$. Soit donc

I.) $n=1$, on aura $x=\frac{3}{2}$,

II.) $n=\frac{3}{2}$, on aura $x=\frac{17}{12}$,

III.) $n=\frac{17}{12}$, on aura $x=\frac{577}{408}$;

& cette derniere valeur approche si fort de $\sqrt{2}$, que son quarré $\frac{332929}{166464}$ ne differe du nombre 2 que de la petite quantité $\frac{1}{166464}$, dont il le surpasse.

788.

On pourra procéder de la même maniere, quand il s'agira de trouver par approximation des racines cubiques, quarré-quarrées, &c.

Soit donnée l'équation du troisieme degré, $x^3=a$, & qu'on se propose de trouver la valeur de $\sqrt[3]{a}$. On supposera, sachant qu'elle est à peu près n, que $x=n+p$; on aura, en omettant pp & p^3, x^3

$= n^3 + 3nnp = a$; ainsi $3nnp = a - n^3$, & $p = \frac{a - n^3}{3nn}$; donc $x = \frac{2n^3 + a}{3nn}$. Si donc n eſt de fort près $= \sqrt[3]{a}$, la formule que l'on vient de trouver en approchera encore beaucoup plus. Mais pour une préciſion encore plus grande, on pourra la ſubſtituer à ſon tour à la place de n, & ainſi de ſuite.

Soit par exemple $x^3 = 2$, & qu'on veuille déterminer $\sqrt[3]{2}$. Si n approche de près le nombre cherché, la formule $\frac{2n^3 + 2}{3nn}$ exprimera ce nombre encore de plus près; qu'on faſſe donc

I.) $n = 1$, on aura $x = \frac{4}{3}$,

II.) $n = \frac{4}{3}$, on aura $x = \frac{91}{72}$,

III.) $n = \frac{91}{72}$, on aura $x = \frac{1621308^{96}}{128634294}$.

789.

On emploie cette méthode avec le même ſuccès, pour trouver par approximation les racines de toutes les équations.

Suppoſons, pour le faire voir, qu'on ait l'équation générale du troiſieme degré, $x^3+axx+bx+c=0$, où n approche déjà beaucoup d'une des racines. Faiſons $x=n-p$; &, puiſque p ſera une fraction, négligeant les puiſſances de cette lettre plus hautes que le premier degré, nous aurons $xx=nn-2np$, & $x^3=n^3-3npp$, d'où réſulte l'équation $n^3-3nnp+ann-2anp+bn-bp+c=0$, ou $n^3+ann+bn+c=3nnp+2anp+bp=(3nn+2an+b)p$; ainſi $p=\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}$, & $x=n-\left(\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}\right)=\frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$. Cette valeur, qui eſt déjà plus exacte que la premiere, étant ſubſtituée à la place de n, en fournira une nouvelle encore plus exacte.

790.

Soit, pour appliquer ce procédé à un exemple, $x^3+2xx+3x-50=0$, où

$a=2$, $b=3$ & $c=-50$. Si n est censé approcher de près une des racines, $x = \frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$, sera une valeur encore plus proche de la vraie. Or la valeur $x=3$ n'étant pas éloignée de la véritable, nous supposerons $n=3$, & nous trouvons $x=\frac{62}{21}$. Que si nous écrivions cette nouvelle valeur à la place de n, nous en trouverions une autre encore plus exacte.

791.

Nous ne donnerons pour les équations des degrés supérieurs au troisieme, que l'exemple suivant :

Soit $x^5=6x+10$, ou $x^5-6x-10=0$, où on remarque facilement que 1 est trop petit, & que 2 est trop grand. Or, si $x=n$ est une valeur assez proche de la vraie, & qu'on fasse $x=n+p$, on aura $x^5=n^5+5n^4p$, & par conséquent $n^5+5n^4p=6n+6p+10$, ou $5n^4p-6p=6n+10-n^5$. Donc $p=\frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$

& $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Qu'on ſuppoſe $n = 1$; on aura $x = \frac{14}{-1} = -14$; cette valeur eſt tout-à-fait impropre, & cela vient de ce que la valeur approchée de n étoit de beaucoup trop petite. On fera donc $n = 2$, & on aura $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, valeur qui s'écarte beaucoup moins de la vraie. Si on ſe donnoit la peine de ſubſtituer maintenant, au lieu de n, la fraction $\frac{69}{37}$, on parviendroit à une valeur encore bien plus exacte de la racine x.

792.

Voilà la méthode la plus ordinaire pour trouver par approximation les racines d'une équation, & elle s'applique utilement dans tous les cas.

Nous allons indiquer cependant une autre méthode, qui mérite attention à cauſe de la facilité du calcul (*). Le fondement de

(*) La méthode d'approximation qui ſuit, ſe fonde ſur la théorie des ſéries qu'on nomme *récurrentes*, & qui

cette méthode consiste à déterminer pour chaque équation une suite de nombres, comme a, b, c, &c. tels que chaque terme de la suite, divisé par le précédent, indique la valeur de la racine d'autant plus exactement, qu'on aura continué plus loin cette suite de nombres.

Supposons que nous soyons parvenus déjà aux termes p, q, r, s, t, &c. il faudra que $\frac{q}{p}$ indique la racine x déjà assez exactement, c'est-à-dire qu'on ait à très-peu près $\frac{q}{p}=x$. On aura de même $\frac{r}{q}=x$, & la multiplication des deux valeurs donnera $\frac{r}{p}=xx$.

ont été imaginées par M. *de Moivre*. On doit cette méthode à M. *Daniel Bernoulli*, qui l'a donnée dans les anciens Commentaires de Pétersbourg, *tom. III.* Mais M. *Euler* la présente ici sous un point de vue un peu différent. Ceux qui souhaiteront d'approfondir ces matieres, peuvent consulter les chapitres XIII & XVII du premier volume de l'*Introd. in anal. infinitorum* de notre célebre Auteur : Ouvrage excellent, dans lequel plusieurs des matieres traitées dans cette premiere partie, et beaucoup d'autres également relatives aux Mathématiques pures, sont développées avec autant de clarté que de profondeur.

De plus, comme $\frac{s}{r} = x$, on aura aussi $\frac{s}{p} = x^3$; ensuite, puisque $\frac{t}{s} = x$, on aura $\frac{t}{p} = x^4$, & ainsi de suite.

793.

Afin de nous expliquer mieux sur cette méthode, nous commencerons par l'équation du second degré $xx = x + 1$, & nous supposerons que dans la série ci-dessus se présentent les termes p, q, r, s, t, &c. Or, comme $\frac{q}{p} = x$, & $\frac{r}{p} = xx$, nous obtiendrons l'équation $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, ou $q + p = r$. Et comme nous trouvons de la même maniere que $s = r + q$, & $t = s + r$; nous en concluons que chaque terme de notre suite est la somme des deux termes précédens; de sorte qu'ayant les deux premiers termes, on est en état de continuer facilement la suite aussi loin qu'on voudra. Quant à ces deux premiers termes, on peut les prendre à volonté; si nous supposons donc qu'ils soient 0, 1, notre suite sera 0, 1, 1, 2,

3;

3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, &c. & telle que, si on en divise un terme quelconque par celui qui le précede immédiatement, on aura une valeur de x d'autant plus approchante de la véritable, qu'on aura choisi un terme plus éloigné. L'erreur, à la vérité, est très-grande au commencement; mais plus on avance, & plus elle diminue. Voici la suite de ces valeurs de x, dans l'ordre où elles s'approchent toujours davantage de la véritable :

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \text{\&c.}$$

Si, par exemple, on fait $x = \frac{21}{13}$, on a $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, où l'erreur n'est que de $\frac{1}{169}$: les termes suivans la donneroient encore plus petite.

794.

Considérons aussi l'équation $xx = 2x + 1$; & puisque toujours $x = \frac{q}{p}$, & $xx = \frac{r}{p}$, nous aurons $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, ou $r = 2q + p$;

d'où nous concluons que le double de chaque terme ajouté au terme précédent, donne le terme suivant. Si nous commençons donc encore par 0, 1, nous aurons la série :

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, &c.

d'où il s'ensuit que la valeur cherchée de x sera exprimée de plus en plus exactement par les fractions suivantes :

$$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}, \&c.$$

lesquelles, par conséquent, approcheront toujours davantage de la vraie valeur $x = 1 + \sqrt{2}$; de sorte que si on retranche de ces fractions l'unité, la valeur de $\sqrt{2}$ se trouvera exprimée de plus en plus exactement par les fractions :

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \&c.$$

Par exemple, $\frac{99}{70}$ a pour quarré $\frac{9801}{4900}$, ce qui ne differe que de $\frac{1}{4900}$ du nombre 2.

795.

Cette méthode n'est pas moins applicable aux équations qui ont un plus grand

nombre de dimenſions. Si l'on a, par exemple, l'équation du troiſieme degré $x^3 = xx + 2x + 1$, on fera $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$, & $x^3 = \frac{ſ}{p}$, & on aura $ſ = r + 2q + p$, par où l'on voit comment, par les trois termes p, q & r, on doit déterminer le ſuivant $ſ$; & comme le commencement eſt toujours arbitraire, on peut former la ſérie qui ſuit: 0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, &c. de laquelle réſultent les fractions ſuivantes pour les valeurs approchées de x:

$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}$, &c.

les premieres de ces valeurs ſont prodigieuſement en défaut; mais ſi on ſubſtitue dans l'équation, au lieu de x, $\frac{60}{28}$ ou $\frac{15}{7}$, on trouve $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, où l'erreur n'eſt que de $\frac{13}{343}$.

796.

Il faut remarquer cependant que toutes les équations ne ſont pas de nature à pouvoir y appliquer cette méthode; & particulierement lorſque le ſecond terme manque,

elle ne peut être employée. Car soit, par exemple, $xx = 2$; si on vouloit faire $x = \frac{q}{p}$ & $xx = \frac{r}{p}$, on auroit $\frac{r}{p} = 2$, ou $r = 2p$, c'est-à-dire $r = 0q + 2p$, d'où résulteroit la suite

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 &c. de laquelle on ne peut rien conclure, parce que chaque terme, divisé par le précédent, donne toujours $x = 1$, ou $x = 2$. Mais on peut obvier à cet inconvénient, en faisant $x = y - 1$; car de cette façon on a $yy + 2y - 1 = 2$; & si l'on fait maintenant $y = \frac{q}{p}$ & $yy = \frac{r}{p}$, on trouve l'approximation que nous avons déjà donnée ci-dessus.

797.

Il en seroit de même de l'équation $x^3 = 2$; elle ne fourniroit pas une telle suite de nombres qui indiquât la valeur de $\sqrt[3]{2}$. Mais on n'a qu'à supposer $x = y - 1$, afin d'avoir l'équation $y^3 - 3yy + 3y - 1 = 2$, ou $y^3 = 3yy - 3y + 1$; car faisant à présent

$y = \frac{q}{p}$, $yy = \frac{r}{p}$, & $y = \frac{s}{p}$, on a $s = 3r - 3q + 3p$, moyennant quoi l'on voit comment trois termes donnés déterminent le suivant.

Adoptant donc trois termes quelconques pour les premiers, par exemple 0, 0, 1, on a la série que voici :

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324, &c.

Les deux derniers termes de cette suite donnent $y = \frac{324}{144}$ & $x = \frac{5}{4}$; & cette fraction approche en effet assez de la racine cubique de 2 ; car le cube de $\frac{5}{4}$ est $\frac{125}{64}$, & celui de $2 = \frac{128}{64}$.

798.

Il faut observer de plus, au sujet de cette méthode, que lorsque l'équation a une racine rationnelle, & qu'on choisit le commencement de la période tel que cette racine en résulte, chaque terme de la suite, divisé par le terme précédent, donnera également la racine exactement.

Pour le faire voir, soit donnée l'équation $xx = x + 2$, dont une des racines est

$x=2$; comme on a ici, pour la série, la formule $r=q+2p$, si on prend 1, 2 pour les deux premiers termes, on a la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. qui est une progression géométrique dont l'exposant $=2$.

La même propriété se prouve par l'équation du troisieme degré $x^3=xx+3x+9$, qui a $x=3$ pour une des racines. Si on suppose les premiers termes 1, 3, 9, on trouvera, par la formule $s=r+3q+9p$, la série 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. qui est pareillement une progression géométrique.

799.

Mais lorsque le commencement de la suite s'écarte de la racine, il ne faut pas croire qu'on ira du moins en s'approchant de cette racine; car lorsque l'équation a plus d'une racine, la suite ne donne par approximation que la plus grande racine; on ne trouve pas une des moindres, à moins

d'avoir choisi les premiers termes convenablement pour cet effet; cela s'éclaircira par l'exemple suivant :

Soit l'équation $xx = 4x - 3$, dont les deux racines sont $x = 1$ & $x = 3$. La formule pour la suite est $r = 4q - 3p$, & si l'on prend 1, 1 pour le commencement de la série, qui indique par conséquent la plus petite racine, on a pour la suite entiere : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. mais si on adopte pour premiers termes les nombres 1, 3, qui contiennent la plus grande racine, on a la suite : 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c. où tous les termes indiquent avec précision la racine 3. Enfin, si on adopte un autre commencement quelconque, pourvu qu'il soit tel que la plus petite racine n'y soit pas comprise, la série approchera toujours davantage de la plus grande racine 3; c'est ce qu'on peut voir par les séries qui suivent :

Commencement,

0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, &c.
1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, &c.
2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095, &c.
2, 1, −2, −11, −38, −118, −362, −1091,
−3278, &c.

où les quotiens de la diviſion des derniers termes par les précédens, approchent toujours plus de la racine plus grande 3, & jamais de la plus petite.

800.

On peut appliquer cette *méthode même* à des équations qui vont à l'infini ; l'équation ſuivante en fournira un exemple :

$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} +$ &c.

La ſérie doit être telle pour cette équation, que chaque terme ſoit égal à la ſomme de tous les précédens, c'eſt-à-dire qu'on aura

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.

d'où l'on voit que la plus grande racine

de l'équation propofée eft exactement $x=2$; & c'eft ce qu'on peut faire voir auffi de la maniere fuivante. Qu'on divife l'équation par x^{∞}, on aura

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\&c.$$

ce qui eft une progreffion géométrique, dont la fomme fe trouve $=\frac{1}{x-1}$; de forte que $1=\frac{1}{x-1}$; multipliant donc par $x-1$, on a $x-1=1$, & $x=2$.

801.

Outre ces deux méthodes de déterminer par des approximations les racines d'une équation, on en trouve çà & là quelques autres, mais qui font toutes ou trop pénibles ou trop peu générales. La méthode qui mérite la préférence fur toutes, eft celle que nous avons expliquée en premier lieu ; car elle s'applique avec fuccès à toutes les efpeces d'équations, tandis que l'autre exige fouvent que l'équation foit préparée

d'une certaine maniere, ſans quoi on ne pourroit en faire uſage; nous en avons vu la preuve dans différens exemples.

Fin de l'Analyſe déterminée.

TABLE
DES CHAPITRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

SECTION PREMIERE.

DES différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs ſimples ou incomplexes.

SECTION SECONDE.

Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs composées ou complexes.

SECTION TROISIEME.

Des Rapports & des Proportions.

SECTION QUATRIEME.

Des Equations algébriques, et de la résolution de ces Equations.

Fin de la Table.